Wintersemester 2015/16

A. Hinrichs, B. Eichinger, R. Lechner

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis und Integrationstheorie
6. Serie

Ankreuzen vor der Übung am 19.11.2015

Aufgabe 31 **Produktmaße und Dichten**

Seien $(\Omega_i, \mathcal{A}_i, \mu_i), i = 1,2$ zwei σ-endliche Maßräume und seinen $g_i : \Omega_i \to [0,\infty)$ zwei Integrationsdichten. Zeigen Sie, dass das Produktmaß $(g_1 \, \mathrm{d}\mu_1) \otimes (g_2 \, \mathrm{d}\mu_2)$ eine Dichte bezüglich des Produktmaßes $\mu_1 \otimes \mu_2$ besitzt und bestimmen Sie diese Dichte.

Aufgabe 32 **Integral und Verteilungsfunktion**

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum und sei $f : \Omega \to [0,\infty)$ messbar. Zeigen Sie, dass dann

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu = \int_0^\infty \mu\big(\{f \geq t\}\big) \, \mathrm{d}t$$

gilt. Hinweis: Schreiben Sie $\mu\big(\{f \geq t\}\big)$ als Integral.

Aufgabe 33 **Fubini zum ersten**

Berechnen Sie das Integral

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{-bx}}{x} \, \mathrm{d}x$$

für $b > a > 0$. Schreiben Sie dazu den Integranden als $\int_a^b \cdots \, \mathrm{d}y$.

Aufgabe 34 **... und zum zweiten**

Berechnen Sie das Integral $\int_\mathbb{R} \mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{d}x$. Schreiben Sie dazu das Doppelintegral $\int_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-x^2-y^2} \, \mathrm{d}(x,y)$ in Polarkoordinaten.

Aufgabe 35 **... und zum dritten**

Berechnen Sie $\int_0^\pi \int_x^\pi \frac{\sin y}{y} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x$.

Aufgabe 36 **Lipschitz-Funktionen**

Eine Funktion $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ ist Lipschitz-stetig, wenn es eine Konstante $L \geq 0$ gibt mit $|x(s) - x(t)| \leq L|s-t|$. Wir betrachten den Raumm $\mathrm{Lip}[0,1]$ aller Lipschitz-stetigen Funktionen $x : [0,1] \to \mathbb{R}$ und definieren für $x \in \mathrm{Lip}[0,1]$

$$\|x\|_{\mathrm{Lip}} = |x(0)| + \sup_{s \neq t} \left| \frac{x(s) - x(t)}{s - t} \right|.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Lip}[0,1]$ ein linearer Raum ist.

(b) Zeigen Sie, dass $\| \cdot \|_{\mathrm{Lip}}$ eine Norm auf $\mathrm{Lip}[0,1]$ ist.

(c) Ist $\sup_{s \neq t} \left| \frac{x(s)-x(t)}{s-t} \right|$ eine Norm auf $\mathrm{Lip}[0,1]$?

Aufgabe 37 **Vollständigkeit**

Zeigen Sie, dass der normierte Raum $\mathrm{Lip}[0,1]$ aus der letzten Aufgabe (mit der Norm $\| \cdot \|_{\mathrm{Lip}}$) ein Banachraum ist.
Hinweis: Rechtfertigen Sie die Definition eines punktweisen Limes x und zeigen Sie dann, dass (x_n) auch bezüglich $\| \cdot \|_{\mathrm{Lip}}$ gegen x konvergiert.