Wintersemester 2015/16
A. Hinrichs, E. Lindner, F. Puchhammer, A. Thalhammer, M. Ullrich

Übungen zur Vorlesung Analysis 1 – 8. Serie

Ankreuzen vor der Übung am 25.11.2015

Aufgabe 57 **Häufungspunkte, Limes Inferior, Limes Superior**

Sei $a_n = \frac{1}{n} + \cos\frac{n\pi}{6}$. Bestimmen Sie alle Häufungspunkte von (a_n) und geben Sie für jeden Häufungspunkt h eine Teilfolge von (a_n) an, die gegen h konvergiert. Bestimmen Sie $\limsup a_n$ und $\liminf a_n$.

Aufgabe 58 **Berechnung von Reihen**

Bestimmen Sie die Summe der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2^n} + \frac{(-1)^n}{3^n}\right)$.

Aufgabe 59 **Teleskopreihen**

Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)}$ lässt sich leicht durch folgenden *Teleskopreihentrick* berechnen. Wir stellen die Reihenglieder $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ dar als Differenzen, von denen sich in der Partialsumme

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

die Glieder teleskopartig aufheben. Wir erhalten $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} s_n = 1$. Berechnen Sie mit diesem Trick die Summen der Reihen

(a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(z+k)(z+k+1)}$ für $z \in \mathbb{C}, -z \notin \mathbb{N}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}$

Aufgabe 60 **Konvergenz und Divergenz von Reihen I**

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz oder Divergenz.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{6^n}{n!}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)\,5^n}{2^n\,3^{n+1}}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n - 2n^n}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$

Aufgabe 61 **Konvergenz und Divergenz von Reihen II**

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz oder Divergenz und absolute Konvergenz.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)!}{n^n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$

AUFGABE 62 **Konvergente Reihen haben schnell fallende Glieder**

Zeigen Sie: Ist $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ eine monoton fallende Folge nichtnegativer reeller Zahlen, so daß die Reihe $\sum a_n$ konvergent ist, dann ist die Folge (na_n) eine Nullfolge.
HINWEIS: Das Cauchykriterium könnte hilfreich sein!

AUFGABE 63 **Zur harmonischen Reihe**

Die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist divergent. Zeigen Sie: Wenn man aus der Reihe alle Summanden $\frac{1}{n}$ weglässt, für die in der Dezimaldarstellung von n mindestens einmal die Ziffer 9 auftritt, dann ist die Reihe schon konvergent.

AUFGABE 64 **Die etwas andere Aufgabe - Beweise ohne Worte**

Können Sie einen Beweis ohne Worte für die Summation der geometrischen Reihe

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots = 2$$

finden?