Wintersemester 2015/16
A. Hinrichs, B. Eichinger, R. Lechner

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis und Integrationstheorie
7. Serie

Ankreuzen vor der Übung am 26.11.2015

Aufgabe 38 **Summennorm**
Auf dem Vektorraum aller ℓ_1-Folgen betrachten wir die Funktion $\|\cdot\|$ gegeben durch

$$\|x\| = \sup_n \left| \sum_{k=1}^n \xi_k \right| \qquad \text{für } x = (\xi_k) \in \ell_1.$$

Zeigen Sie, dass $(\ell_1, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum, aber kein Banachraum ist.

Aufgabe 39 **Einheitskugeln**

Ist K eine Teilmenge eines linearen Raumes X, dann nennt man K

(a) *konvex*, wenn gilt: Sind $x_0, x_1 \in K$ und ist $0 \leq \lambda \leq 1$, dann ist $(1-\lambda)x_0 + \lambda x_1 \in K$.

(b) *kreisförmig*, wenn gilt: Ist $x \in K$ und $\lambda \in \mathbb{K}$ mit $|\lambda| = 1$, dann ist $\lambda x \in K$.

(c) *absorbierend*, wenn gilt: Zu jedem $x \in X$ existiert ein $\lambda > 0$ mit $x \in \lambda K := \{\lambda y : y \in K\}$.

Eine kreisförmige und konvexe Menge nennt man *absolutkonvex*. Sei nun X ein normierter Raum und sei $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ die abgeschlossene Einheitskugel in X. Zeigen Sie, dass B_X eine abgeschlossene absolutkonvexe und absorbierende Menge ist.

Aufgabe 40 **Minkowski-Funktional**

Sei X ein linearer Raum und sei K eine abgeschlossene absolutkonvexe und absorbierende Menge. Zeigen Sie, dass das *Minkowski-Funktional* zu K gegeben durch

$$\|x\|_K = \inf\{\lambda > 0 : x \in \lambda K\}$$

eine Halbnorm auf X definiert mit $K = \{x \in X : \|x\|_K \leq 1\}$.

Aufgabe 41 **ℓ_p-Räume - Inklusionen**

Zeigen Sie für $1 \leq p < q < \infty$ die Ungleichung $\|x\|_q \leq \|x\|_p$ für $x \in \ell_p$ und damit die Inklusion $\ell_p \subseteq \ell_q$. Zeigen Sie, dass diese Inklusion echt ist.
Hinweis: Betrachten Sie zunächst $p = 1$.

Aufgabe 42 $L_p[0,1]$

Sei $\alpha \geq 0$ und sei $x_\alpha(t) = t^{-\alpha}$ für $0 < t \leq 1$. Für welche $p \in [1, \infty]$ und $\alpha \geq 0$ gilt $x_\alpha \in L_p[0,1]$?

Aufgabe 43 **$L_p(\mu)$-Räume - Inklusionen für endliches μ**

Sei μ ein endliches Maß auf einer Menge Ω und seien $1 \leq p < q \leq \infty$. Zeigen Sie die Ungleichung $\|x\|_p \leq \mu(\Omega)^{1/p-1/q}\|x\|_q$ für $x \in L_q(\mu)$ und damit die Inklusion $L_q(\mu) \subseteq L_p(\mu)$. Zeigen Sie, dass die Inklusion $L_q[0,1] \subseteq L_p[0,1]$ echt ist.

Aufgabe 44 **$L_p(\mathbb{R})$ - keine Inklusionen**

Sei $1 \leq p < q \leq \infty$. Zeigen Sie, dass keine der Inklusionen $L_p(\mathbb{R}) \subseteq L_q(\mathbb{R})$ und $L_q(\mathbb{R}) \subseteq L_p(\mathbb{R})$ gilt.