A. Hinrichs, E. Lindner, F. Puchhammer, A. Thalhammer, M. Ullrich

Übungen zur Vorlesung Analysis 1 – 9. Serie

Ankreuzen vor der Übung am 02.12.2015

Aufgabe 65 **Alternierende Reihen**

Untersuchen Sie die folgenden alternierenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\sqrt[n]{3}-1\right)$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{n^2+1}$

Aufgabe 66 **Verdichtungssatz**

Sei (a_n) eine monoton fallende Folge nichtnegativer reeller Zahlen. Zeigen Sie: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert genau dann, wenn die *verdichtete Reihe* $\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k}$ konvergiert.
Hinweis: Majoranten-/Minorantenkriterium

Aufgabe 67 **Anwendung des Verdichtungssatzes I**

Zeigen Sie mit Hilfe des Verdichtungssatzes: Die *verallgemeinerte harmonische Reihe* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ mit $\alpha\in\mathbb{R}$ konvergiert genau dann , wenn $\alpha>1$ ist.

Aufgabe 68 **Anwendung des Verdichtungssatzes II**

Für welche $\alpha\in\mathbb{R}$ ist die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n-2}}{n^\alpha}$ konvergent?
Hinweis: Hier kann man direkt die Lösung der vorhergehenden Aufgabe anwenden.

Aufgabe 69 **Quotienten- und Wurzelkriterium I**

Sei (a_n) eine Folge komplexer Zahlen mit $a_n\neq 0$ für alle $n\in\mathbb{N}$, für die $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| =: q$ existiert. Zeigen Sie $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=q$.

Aufgabe 70 **Quotienten- und Wurzelkriterium II**

Die Folge (a_n) sei definiert durch $a_n=2^{-n}$ für gerades n und $a_n=3^{-n}$ für ungerades n. Zeigen Sie, dass durch direkte Anwendung des Quotientenkriteriums keine Aussage über die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ möglich ist, wohl aber durch die Anwendung des Wurzelkriteriums.

Aufgabe 71 **Allgemeine Konvergenzaussagen**

Entscheiden Sie, ob die folgenden Aussagen richtig oder falsch sind. Beweisen Sie sie oder geben Sie ein Gegenbeispiel an.

(a) Konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$.

(b) Konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$.

(c) Konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2$, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

(d) Konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut, so konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{|a_k a_{k+1}|}$.

Aufgabe 72 **Cauchyprodukt**

Zeigen Sie, daß die alternierende Reihe $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)$ konvergiert. Berechnen Sie das formale Cauchy-Produkt $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}\right)$. Was lässt sich über die Konvergenz der resultierenden Reihe sagen?