

Übungen zur Vorlesung Analysis 1 – 10. Serie

ANKREUZEN VOR DER ÜBUNG AM 09.12.2015

AUFGABE 73 Positiver und negativer Teil reeller FunktionenFür eine Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definieren wir die Funktionen $f_+, f_- : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls } f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{falls } f(x) < 0 \end{cases} \quad \text{und} \quad f_-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{falls } f(x) \leq 0 \\ 0 & \text{falls } f(x) > 0 \end{cases}.$$

Zeigen Sie:

- (a) Es gilt $f = f_+ - f_-$ und $|f| = f_+ + f_-$.
 (b) Ist f stetig, dann sind f_+ und f_- stetig.

AUFGABE 74 StetigkeitEs sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{für } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

In welchen Punkten $x_0 \in \mathbb{R}$ ist f stetig, in welchen nicht?**AUFGABE 75 Anwendung Folgenstetigkeit**Seien $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ drei Funktionen mit $f \leq g \leq h$. Zeigen Sie, dass g stetig in $x_0 \in \mathbb{R}$ ist, wenn f und h stetig in x_0 sind und $f(x_0) = h(x_0)$ gilt.**AUFGABE 76 Eine Funktionalgleichung**Sei $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(x) = f(x^2)$. Zeigen Sie, dass f konstant ist.**AUFGABE 77 Stückweise definierte Funktion und Stetigkeit**Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist die Funktion $f(x) = \begin{cases} 1 - ax & , \quad x < 1 \\ a - x^2 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$ stetig?**AUFGABE 78 Stetigkeit, gleichmäßige Stetigkeit, Lipschitz-Stetigkeit I**Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2}$ auf den angegebenen Definitionsbereichen $D(f)$ auf Stetigkeit, gleichmäßige Stetigkeit und Lipschitz-Stetigkeit.

- (a) $D(f) = (0, 1)$ (b) $D(f) = (1, \infty)$ (c) $D(f) = \left[\frac{1}{10}, 1\right]$

AUFGABE 79 Stetigkeit, gleichmäßige Stetigkeit, Lipschitz-Stetigkeit IIUntersuchen Sie die Funktion $f : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \sqrt[3]{x}$ auf Stetigkeit, gleichmäßige Stetigkeit und Lipschitz-Stetigkeit.**AUFGABE 80 Grenzwerte**

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte :

- (a) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 76x - 320}{x^2 - 6x + 8}$ (b) $\lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - x - 2}}$ (c) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1 + 2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$