Wintersemester 2015/16

A. Hinrichs, B. Eichinger, R. Lechner

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis und Integrationstheorie
9. Serie

Ankreuzen vor der Übung am 10.12.2015

Aufgabe 50

Sei $\mathcal{P}$ der Vektorraum aller reellwertigen Polynome auf $\mathbb{R}$. Für ein Polynom $p(t) = \sum_{k=0}^n a_k t^k$ sei $\|p\| = \sum_{k=0}^n |a_k|$.

(a) Zeigen Sie, dass $(\mathcal{P}, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum ist.

(b) Untersuchen Sie, ob das Funktional

$$\ell : \mathcal{P} \to \mathbb{R}, \quad \ell(p) = p'(1)$$

stetig ist, und berechnen Sie gegebenenfalls $\|\ell\|$.

(c) Untersuchen Sie, ob der Operator

$$T : \mathcal{P} \to \mathcal{P},\ (Tp)(t) = \int_0^t p(s)\,\mathrm{d}s$$

stetig ist, und berechnen Sie gegebenenfalls $\|\ell\|$.

Aufgabe 51

Eine lineare Abbildung $A : \mathbb{K}^m \to \mathbb{K}^n$ werde als $(n \times m)$-Matrix (a_{ij}) dargestellt. Zeigen Sie:

(a) Sind beide Räume mit der ℓ_1-Norm $\|(t_i)\|_1 = \sum |t_i|$ ausgestattet, so ist

$$\|A\| = \max_{1 \le j \le m} \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \quad \text{(Spaltensummennorm)}.$$

(a) Sind beide Räume mit der ℓ_∞-Norm $\|(t_i)\|_\infty = \max |t_i|$ ausgestattet, so ist

$$\|A\| = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^m |a_{ij}| \quad \text{(Zeilensummennorm)}.$$

Aufgabe 52

Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine symmetrische Matrix und $r(A) = \max\{|\lambda| :\ \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\}$. Betrachten Sie A als lineare Abbildung auf $\mathbb{R}^n$.

(a) Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$, und sei $\|A\|$ die zugehörige Operatornorm. Zeigen Sie, dass $\|A\| \ge r(A)$ und $\|A\|_2 = r(A)$ für die euklidische Norm $\|\cdot\|_2$.

(b) $A^n \to 0$ (bzgl. irgendeiner Norm) genau dann, wenn $r(A) < 1$.