Wintersemester 2015/16
A. Hinrichs, E. Lindner, F. Puchhammer, A. Thalhammer, M. Ullrich

Übungen zur Vorlesung Analysis 1 – 11. Serie

Ankreuzen vor der Übung am 16.12.2015

Aufgabe 81 **Die Sägezahnfunktion**

Wir erinnern an die Definition des größten Ganzen $[x]$ einer reellen Zahl x als $[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$. Die Funktion $\mathrm{zack} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch $\mathrm{zack}(x) = \big|[x + 1/2] - x\big|$.

(a) Zeichnen Sie den Graph der Funktion zack.

(b) Zeigen Sie $\mathrm{zack}(x) = |x|$ für $|x| \leq \frac{1}{2}$.

(c) Zeigen Sie, dass zack 1-periodisch ist, also $\mathrm{zack}(x + n) = \mathrm{zack}(x)$ für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt.

(d) Zeigen Sie, dass zack stetig ist.

Aufgabe 82 **Grenzwert für $x \to \infty$**

(a) Berechnen Sie $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x + 42} - \sqrt{x}$.

(b) Bestimmen Sie zu gegebenen $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$ die Konstanten α, β so, dass die Konvergenz $\lim_{x\to\infty} \sqrt{ax^2 + bx + c} - \alpha x - \beta = 0$ gilt.

Aufgabe 83 **Grenzwerte**

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$ für $b \neq 0$ (b) $\displaystyle\lim_{x\searrow 0} \left(2 + x\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}\right)$ (c) $\displaystyle\lim_{x\nearrow 0} \left(2 + x\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}\right)$

Aufgabe 84 **Zwischenwertsatz I**

Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Zeigen Sie, daß die Funktion $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x - a} + \dfrac{x^6 + 1}{x - b}$ mindestens eine Nullstelle in (a, b) hat!

Aufgabe 85 **Zwischenwertsatz II**

Zeigen Sie, dass es zu jeder Zeit zwei antipodische Punkte auf dem Erdäquator gibt (d.h. zwei Punkte, deren Verbindungsstrecke durch den Mittelpunkt der Erde geht), die die gleiche Temperatur haben. Hierbei wird die Temperaturverteilung als stetige Funktion vorausgesetzt.

Aufgabe 86 **Realisierung von Mittelwerten**

Zeigen Sie, daß es zu jeder in (a, b) stetigen Funktion und zu vorgegebenen Punkten $x_1, x_2, \ldots, x_n \in (a, b)$ stets ein $x \in (a, b)$ mit $f(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k)$ gibt.

Aufgabe 87 **Logarithmus und Divergenzgeschwindigkeit der harmonischen Reihe**

(a) Beweisen Sie für $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $\frac{1}{n+1} < \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$

(b) Es sei $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n$. Zeigen Sie die Konvergenz dieser Folge.
Hinweis: Sie können z.B. zeigen, dass (a_n) eine Cauchyfolge ist.

Aufgabe 88 **Rechnen mit Exponentialfunktionen und Logarithmen**

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen.

(a) $\log_{10}(2x+4) - \log_{10}(x-2) = 1$

(b) $5^{\log_3(\log_{42} x)} = 1$

(c) $8^{x+4} \cdot 16^{x+3} = 32^{x+4} \cdot 4$