Wintersemester 2015/16

A. Hinrichs, B. Eichinger, R. Lechner

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis und Integrationstheorie 10. Serie

Ankreuzen vor der Übung am 14.01.2016

Aufgabe 53 Multiplikationsoperatoren auf ℓ_p

Für $a = (\alpha_n) \in \ell_\infty$ definiert man den *Multiplikationsoperator* $T_a : \ell_p \to \ell_p$ für $1 \le p \le \infty$ durch $T_a x = (\alpha_n \xi_n)$ für $x = (\xi_n) \in \ell_p$. Zeigen Sie, dass für $x \in \ell_p$ das Bild $T_a x$ tatsächlich in ℓ_p ist, dass T_a ein linearer stetiger Operator ist und berechnen Sie die Operatornorm $\|T_a\|$.

Aufgabe 54 normannehmende Funktionale

Sei X ein normierter Raum und $a \in X'$ ein stetiges lineares Funktional auf X. Gibt es dann ein $x_0 \in X$ mit $\|x_0\| = 1$ und $|a(x_0)| = \|x_0\|$, so sagt man, dass das Funktional *a seine Norm annimmt*. Berechnen Sie die Norm der folgenden Funktionale und zeigen Sie, dass sie ihre Norm nicht annehmen:

(a) Das Funktional $a(x) = a\big((\xi_n)\big) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\xi_n$ auf $X = c_0$.

(b) Das Funktional $a(x) = \int_0^{\frac{1}{2}} x(t)\,\mathrm{d}t - \int_{\frac{1}{2}}^1 x(t)\,\mathrm{d}t$ auf $X = C[0,1]$.

Aufgabe 55 Injektivität linearer Operatoren

Seien X, Y normierte Räume und sei $T : X \to Y$ ein linearer Operator, für den es eine Konstante $c > 0$ gibt mit

$$\|Tx\| \ge c\|x\| \qquad \text{für alle } x \in X.$$

Zeigen Sie, dass T injektiv ist und der inverse Operator $T^{-1} : T(X) \to Y$ definiert auf dem Bild $T(X) \subseteq Y$ von X stetig ist mit $\|T^{-1}\| \le \frac{1}{c}$.

Hinweis: Sie brauchen dazu nicht den Satz vom inversen Operator.

Aufgabe 56 Polynomräume

Sei $\mathcal{P}$ der lineare Raum aller Polynome auf $\mathbb{R}$ und sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf $\mathcal{P}$. Zeigen Sie

(a) Die Teilräume $\mathcal{P}_n$ aller Polynome vom Grad höchstens n sind endlichdimensionale lineare Teilräume von $\mathcal{P}$.

(b) Die Teilräume $\mathcal{P}_n$ sind abgeschlossen in $(\mathcal{P}, \|\cdot\|)$.

(c) Der normierte Raum $(\mathcal{P}, \|\cdot\|)$ ist kein Banachraum (Hinweis: Satz von Baire).

Aufgabe 57 Polarisationsformel

Sei X ein *reeller* Prä-Hilbertraum. Zeigen Sie, dass dann die sogenannte *Polarisationsformel*

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

gilt.

Bemerkung: Ist X ein reeller normierter Raum, in dem die Parallelogrammgleichung gilt, dann wird mittels der Polarisationsformel ein Skalarprodukt auf X definiert mit $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$. Also ist X dann ein Prä-Hilbertraum (Satz von Jordan-von Neumann).

Aufgabe 58 Verallgemeinerte Parallelogrammgleichung

Zeigen Sie, daß für $n \in \mathbb{N}$ und für Punkte $x_1, \dots, x_n$ in einem Prä-Hilbertraum die Gleichung

$$\frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n = \pm 1} \left\| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k x_k \right\|^2 = \sum_{k=1}^n \|x_k\|^2$$

gilt.