

Übungen zur Vorlesung Analysis 1 – 13. Serie

ANKREUZEN VOR DER ÜBUNG AM 20.01.2016

AUFGABE 97 Mittelwertsatz

Mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung beweise man folgende Aussagen:

(a) $\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x$ für $x > 0$

(b) $\cos x - 1 + \frac{x^2}{2} > 0$ für $x > 0$

AUFGABE 98 Extrema

Für folgende Funktionen berechne man die lokalen und globalen Extrema:

(a) $f(x) = x^n e^{-x}$ auf $[0, \infty)$ für $(n \in \mathbb{N})$

(b) $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ auf $(0, \infty)$

AUFGABE 99 Extrema II

Aus einem kreisrunden Stück Papier (mit Radius R) soll ein Sektor so herausgeschnitten werden, dass daraus ein Kreiskegel möglichst großen Volumens geformt werden kann. Man bestimme den dafür nötigen Sektorwinkel.

AUFGABE 100 Monotonie

Zeigen Sie, daß die Funktion $f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ für $x \in (0, \infty)$ streng monoton wachsend ist.

AUFGABE 101 Stetige Differenzierbarkeit

Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei gegeben durch $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$ Zeigen Sie:

(a) f ist stetig.

(b) f ist differenzierbar.

(c) Die Ableitung f' ist nicht stetig.

AUFGABE 102 Taylorpolynome

Bestimmen Sie mit Hilfe des Taylorschen Satzes für die Funktion $f(x) = \sin x$ an der Stelle $x_0 = 0$ den Wert von $\sin 1$ bis auf einen Fehler von 10^{-3} .

AUFGABE 103 l'Hospital I

Zeigen Sie für die folgenden Grenzwerte, dass die Regel von l'Hospital anwendbar ist und berechnen Sie diese.

(a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^n - 2^n}{x - 2}$ für $n \in \mathbb{N}$.

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 2x}$

AUFGABE 104 l'Hospital II

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{x \searrow 0} \frac{\ln(\sin 5x)}{\ln(\sin 3x)}$

(b) $\lim_{x \nearrow 1} \ln x \ln(1-x)$