Wintersemester 2015/16

A. Hinrichs, B. Eichinger, R. Lechner

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis und Integrationstheorie 11. Serie

Ankreuzen vor der Übung am 21.01.2016

Aufgabe 59 **Schwache Konvergenz in Hilberträumen**

Sei H ein Hilbertraum. Eine Folge (x_n) in H heißt *schwach konvergent* gegen $x \in H$, wenn für jedes $y \in H$ die Konvergenz $\langle x_n, y\rangle \to \langle x, y\rangle$ gilt. Zeigen Sie, dass eine Folge (x_n) in H genau dann gegen $x \in H$ konvergiert (also $\|x_n - x\| \to 0$ gilt), wenn (x_n) schwach gegen x konvergiert und $\|x_n\| \to \|x\|$ gilt.

Aufgabe 60 **Biorthogonales Komplement**

Zeigen Sie die folgende Eigenschaft aus dem Skript: Ist A eine Teilmenge eines Prä-Hilbertraumes H, dann gilt $A \subseteq \left(A^{\perp}\right)^{\perp}$.

Aufgabe 61 **Orthogonales Komplement abgeschlossener Unterräume in einem Prähilbertraum**

Ziel dieser Aufgabe ist es, ein Beispiel eines Prä-Hilbertraumes H und eines abgeschlossenen linearen Unterraumes $U \subseteq H$ mit $U \neq \left(U^{\perp}\right)^{\perp}$ zu finden.

(a) Warum ist das in einem Hilbertraum nicht möglich?

(b) Sei $d \subset \ell_2$ der Raum der abbrechenden Folgen $x = (\xi_k)$ mit $\xi_k \neq 0$ nur für endlich viele k mit dem Skalarprodukt aus ℓ_2. Zeigen Sie, dass d kein Hilbertraum ist.

(c) Sei $b : \ell_2 \to \mathbb{K}$ das lineare Funktional gegeben durch $b(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\xi_k}{k}$ und sei $a : d \to \ell_2$ die Einschränkung von b auf d. Warum sind a, b stetig?

(d) Sei U der Nullraum $U = \{x \in d : a(x) = 0\} \subseteq d$ in d und sei V der Nullraum $V = \{x \in \ell_2 : b(x) = 0\} \subseteq \ell_2$ in ℓ_2. Bestimmen Sie $V^{\perp} \subseteq \ell_2$.

(e) Zeigen Sie $U^{\perp} = \{0\}$ und damit $\left(U^{\perp}\right)^{\perp} = d \neq U$.

Sie dürfen bei dieser Aufgabe auch kreuzen, wenn Sie mindestens 4 der 5 Teilaufgaben gelöst haben.

Aufgabe 62 **Orthogonalprojektionen**

Seien U, V zwei abgeschlossene lineare Teilräume eines Hilbertraumes H und seinen P_U, P_V die zugehörigen Orthogonalprojektionen. Zeigen Sie, dass $U \subseteq V$ genau dann gilt, wenn $P_U = P_V P_U = P_U P_V$ ist.

Aufgabe 63 **Orthogonalprojektionen sind selbstadjungiert**

Ein linearer stetiger Operator $T \in L(H)$ auf einem Hilbertraum H heißt *selbstadjungiert*, wenn für alle $x, y \in H$ die Gleichheit $\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$ gilt. Zeigen Sie, dass die Orthogonalprojektion P_U auf einen abgeschlossenen linearen Teilraum U eines Hilbertraumes H selbstadjungiert ist.