Wintersemester 2015/16

A. Hinrichs, B. Eichinger, R. Lechner

Übungen zur Vorlesung Funktionalanalysis und Integrationstheorie
12. Serie

Ankreuzen vor der Übung am 28.01.2016

Aufgabe 64 **Gram-Schmidt-Verfahren**

Berechnen Sie mit dem Gram-Schmidt-Verfahren ein Orthonormalsystem e_0, e_1, e_2, e_3 in $L_2[0,1]$, das den gleichen Raum aufspannt wie die Potenzfunktionen $\{p_0, p_1, p_2, p_3\}$ gegeben durch $p_k(t) = t^k$.

Aufgabe 65 **Fourierbasis**

Zeigen Sie, dass das trigonometrische System

$$S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kt \,:\, k \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kt \,:\, k \in \mathbb{N} \right\}$$

ein Orthonormalsystem in $L_2[-\pi, \pi]$ ist.

Aufgabe 66 **Parseval-Gleichung, Fourierreihe**

Berechnen Sie die *Fourierkoeffizienten* $\langle x, e \rangle$ für die Funktion $x(t) = |t|$ in $L_2[-\pi, \pi]$ und $e \in S$, wobei S das trigonometrische System S aus der vorhergehenden Aufgabe ist. Benutzen Sie die Parseval-Gleichung für x zur Berechnung der Reihen

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} \qquad \text{und} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}.$$

Aufgabe 67 **Rademacher-Funktionen**

Die *Rademacher-Funktionen* $r_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ sind definiert durch $r_n(t) = \operatorname{sign} \sin(2^n \pi t)$ für $t \in [0,1]$ und $n \in \mathbb{N}_0$. Hierbei ist sign die Signum-Funktion.

(a) Skizzieren Sie die ersten drei Rademacher-Funktionen.

(b) Zeigen Sie, dass $\{r_n \,:\, n \in \mathbb{N}_0\}$ ein Orthonormalsystem ist.

(c) Zeigen Sie, dass $\{r_n \,:\, n \in \mathbb{N}_0\}$ keine Orthonormalbasis ist.

(d) Berechnen Sie $\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t$ für die Funktion $f_n(t) = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} r_k(t) \right)^4$.

(e) Benutzen Sie den Satz von der monotonen Konvergenz für die Funktion $g_\ell(t) = \sum_{k=1}^{\ell} f_k(t)$ und (d), um

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} r_k(t) = 0$$

für fast alle t zu zeigen.

Sie dürfen bei dieser Aufgabe auch kreuzen, wenn Sie mindestens 4 der 5 Teilaufgaben gelöst haben.

Aufgabe 68 **Bestapproximation**

Sei $\{x_1, \dots, x_n\}$ ein Orthonormalsystem in einem Hilbertraum H. Bestimmen Sie für gegebenes $x \in H$ Zahlen $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, für die $\|x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k\|$ minimal ist.