A. HINRICHS, E. LINDNER, F. PUCHHAMMER, M. ULLRICH

Übungen zur Vorlesung Analysis 2 – 1. Serie

ANKREUZEN VOR DER ÜBUNG AM 09.02.2016

AUFGABE 1 **Konvergenz von Funktionenfolgen I**

Konvergieren die angegebenen Funktionenfolgen $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise bzw. gleichmäßig in den angegebenen Intervallen I? Bestimmen Sie gegebenenfalls die Grenzfunktion.

(a) $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx}, \qquad I = [0,2]$

(b) $f_n(x) = \sqrt[n]{1+x^{2n}}\,, \qquad I = [0,2]$

AUFGABE 2 **Konvergenz von Funktionenfolgen II**

Konvergieren die angegebenen Funktionenfolgen $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise bzw. gleichmäßig in den angegebenen Intervallen I? Bestimmen Sie gegebenenfalls die Grenzfunktion.

(a) $f_n(x) = \dfrac{x^n - n}{x^n + n}, \qquad I = [0,2]$

(b) $f_n(x) = \left[x(1-x)\right]^n, \qquad I = [0,1]$

AUFGABE 3 **Stetigkeit der Grenzfunktion**

Zeigen Sie, dass die durch

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z^k}{k!}\right)^2$$

gegebene Funktion für $z \in \mathbb{C}$ wohldefiniert und stetig ist.

AUFGABE 4 **Vertauschung Limes und Differentiation**

Man untersuche die gegebenen Funktionenfolgen auf gleichmäßige Konvergenz. Ist die Grenzfunktion differenzierbar und darf man Limesbildung und Differentiation vertauschen?

(a) $f_n(x) = \begin{cases} \frac{n}{2}x^2 + \frac{1}{2n}\,, & |x| \le \frac{1}{n} \\ |x|\,, & |x| > \frac{1}{n} \end{cases}$

(b) $f_n(x) = \dfrac{\sin(n^2 x)}{n} + x\,,\ x \in \mathbb{R}$

AUFGABE 5 **Vertauschung Limes und Integration**

Man überprüfe die Funktionenfolgen auf punktweise bzw. gleichmäßige Konvergenz. Darf man Limesbildung und Integration vertauschen?

(a) $f_n(x) = \begin{cases} \min\left\{n, \frac{1}{x}\right\}, & x \in (0,1] \\ 0\,, & x = 0 \end{cases}$

(b) $f_n(x) = \begin{cases} n\sin(nx)\,, & 0 < x \le \frac{\pi}{n} \\ 0\,, & \frac{\pi}{n} < x \le 1 \end{cases}$

AUFGABE 6 **Beschränktheit der Grenzfunktion**

Sei (f_n) eine Folge beschränkter Funktionen $f_n : I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall I. Zeigen Sie: Ist die Folge (f_n) gleichmäßig konvergent gegen f, dann ist f beschränkt. Finden Sie ein Beispiel einer punktweise konvergenten Folge (f_n) beschränkter Funktionen auf $I = [0,1]$, deren Limes nicht beschränkt ist.

AUFGABE 7 **Bestimmung der Summe I**

Bestimmen Sie Konvergenzbereich und Summe von $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \ldots$ für $x \in \mathbb{R}$. Untersuchen Sie dabei auch die Ränder des Konvergenzbereichs.

Aufgabe 8 Bestimmung der Summe II

Bestimmen Sie Konvergenzbereich und Summe von $\frac{x^2}{1\cdot 2} - \frac{x^4}{3\cdot 4} + \frac{x^6}{5\cdot 6} - \frac{x^8}{7\cdot 8} + - \dots$ für $x \in \mathbb{R}$. Untersuchen Sie dabei auch die Ränder des Konvergenzbereichs.