Sommersemester 2016
A. Hinrichs, E. Lindner, F. Puchhammer, M. Ullrich

Übungen zur Vorlesung Analysis 2 – 2. Serie

Ankreuzen vor der Übung am 16.03.2016

Aufgabe 9 Potenzreihe einer rationalen Funktion

Benutzen Sie die geometrische Reihe, um eine Potenzreihendarstellung $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ der Funktion $f : \mathbb{C} \setminus \{2\} \to \mathbb{C}$ gegeben durch $f(z) = \frac{1+z^3}{2-z}$ zu finden. Bestimmen Sie den Konvergenzradius dieser Potenzreihe.

Aufgabe 10 Potenzreihendarstellung durch Koeffizientenvergleich

Gegeben sei die Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ mit $D \subseteq \mathbb{C}$ und $f(z) = \frac{1-z}{z^2+2}$. Bestimmen Sie den maximalen Definitionsbereich D und ermitteln Sie durch den Ansatz

$$1 - z = (z^2 + 2) \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$$

und den Identitätssatz eine Potenzreihe für f. Welchen Konvergenzradius hat die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$?

Aufgabe 11 Konvergenzradius von Potenzreihen I

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihen

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z^2}{5}\right)^k$

(b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (k^2 + a^k) z^k$ für festes $a \in \mathbb{C}$

Aufgabe 12 Konvergenzradius von Potenzreihen II

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihen

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{k}{e}\right)^k z^k$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3 + (-2)^k}{k^3} z^k$

Aufgabe 13 Konvergenzradius von Potenzreihen III

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihen

(a) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k} z^{2^k}$

(b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ mit $a_k = a^k$ für gerades k und $a_k = b^{2k}$ für ungerades k und gegebene $a, b > 0$

Aufgabe 14 Produkt von Potenzreihen I

Zeigen Sie: Ist $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$, so gilt

$$\frac{1}{1-z} \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k = \sum_{k=0}^{\infty} (a_0 + a_1 + \cdots + a_k) z^k \quad \text{für } |z| < \min(1, R).$$

AUFGABE 15 **Produkt von Potenzreihen II**

Benutzen Sie die Potenzreihen für Sinus- und Cosinus-Funktion und das Cauchy-Produkt, um die Identität $\sin 2z = 2 \sin z \cos z$ für beliebige $z \in \mathbb{C}$ zu zeigen.

AUFGABE 16 arsinh**-Reihe**

Benutzen Sie die Integraldarstellung $\operatorname{arsinh} x = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2+1}}$, um eine Reihendarstellung für $\operatorname{arsinh} x$ zu gewinnen. Orientieren Sie sich dabei an der Herleitung der arcsin-Reihe in der Vorlesung.