Sommersemester 2016

A. Hinrichs, E. Lindner, F. Puchhammer, M. Ullrich

Übungen zur Vorlesung Analysis 2 – 3. Serie

Ankreuzen vor der Übung am 06.04.2016

Aufgabe 17 **Abgeschlossene Kugeln sind abgeschlossen**

Zeigen Sie, dass jede abgeschlossene Kugel in einem metrischen Raum eine abgeschlossene Menge, also das Komplement einer offenen Menge, ist.

Aufgabe 18 **Kugeln sind konvex**

Eine Menge K in einem Vektorraum X heißt *konvex*, wenn mit $x, y \in K$ auch die Verbindungsstrecke zwischen x und y in K enthalten ist, also

$$x, y \in K,\ \lambda \in [0,1] \Longrightarrow (1-\lambda)x + \lambda y \in K$$

gilt. Zeigen Sie, dass die Kugeln $B_r(x) = \{y \in X : \|y - x\| \le r\}$ in einem normierten Raum $(X, \|\cdot\|)$ konvex sind.

Aufgabe 19 **Nichtnegativität einer Norm bzw. Metrik**

Zeigen Sie, dass die Nichtnegativität einer Norm bzw. einer Metrik nicht explizit in der Definition gefordert werden muss, sondern sich aus den übrigen Eigenschaften einer Norm bzw. Metrik ergibt.

Aufgabe 20 **Normen auf $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$**

Gegeben seien die Vektoren $w = (1,4), x = (-3,2) \in \mathbb{R}^2$ und $y = (-2,2,1), z = (0,1,0) \in \mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie die Vektoren $w + 2x$ und $3z - y$ und berechnen Sie Summennorm, euklidische Norm und Maximumsnorm von $w, x, y, z, w + 2x$ und $3z - y$.

Aufgabe 21 **Übertragung von Normen mittels linearer Abbildungen**

Sei $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ein normierter Raum, sei X ein Vektorraum und sei $A : X \to Y$ eine injektive lineare Abbildung. Zeigen Sie, dass durch den Ansatz $\|x\|_X = \|Ax\|_Y$ für $x \in X$ eine Norm $\|\cdot\|_X$ auf X definiert wird.

Aufgabe 22 **Hamming-Abstand von Codes**

Die Elemente von $X = \{0,1\}^d$ nennt man auch *binäre Codes* der Länge d. Der *Hamming-Abstand* $d(x, y)$ zweier Punkte $x, y \in X$ ist die Anzahl der Koordinaten, in denen sich x und y unterscheiden. Zeigen Sie, dass (X, d) ein metrischer Raum ist. Bestimmen Sie für $k = 0, 1, 2, \ldots, d$ die Anzahl der Punkte in der abgeschlossenen Kugel $B_k(x)$ für gegebenes $x \in X$.

Aufgabe 23 **Produktmetrik**

Seien (X, d_X) und (Y, d_Y) zwei metrische Räume. Zeigen Sie, dass mittels

$$d_1\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = d_X(x_1, x_2) + d_Y(y_1, y_2), \quad d_2\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = \sqrt{d_X(x_1, x_2)^2 + d_Y(y_1, y_2)^2}$$

und

$$d_\infty\big((x_1, y_1), (x_2, y_2)\big) = \max\big\{d_X(x_1, x_2), d_Y(y_1, y_2)\big\}$$

für $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in X \times Y$ Metriken d_1, d_2, d_∞ auf $X \times Y$ definiert werden.

Aufgabe 24 **Geometrische Begriffe**

Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen der Euklidischen Ebene $\mathbb{R}^2$ und geben Sie jeweils das Innere, den Abschluss und den Rand an.

(a) $A = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4x^2 + 9y^2 \ge 1\big\}$

(b) $B = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 < y^2\big\}$

(c) $C = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < 1,\ 1 < y < 2\big\}$

(d) $D = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \ne 0,\ \sin\frac{1}{x} = y\big\}$