*Sommersemester 2016*
A. Hinrichs, E. Lindner, F. Puchhammer, M. Ullrich

# Übungen zur Vorlesung Analysis 2 – 4. Serie

Ankreuzen vor der Übung am 13.04.2016

---

**Aufgabe 25 Dreiecks- und Vierecksungleichung**

Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum und seien $x, y, z, u, v \in X$. Zeigen Sie

(a) $|d(x,z) - d(y,z)| \leq d(x,y)$.

(b) $|d(x,y) - d(u,v)| \leq d(x,u) + d(y,v)$.

**Aufgabe 26 Konvergenz**

Zeigen Sie: Hat eine Cauchyfolge in einem metrischen Raum eine konvergente Teilfolge, so ist sie konvergent (gegen den Grenzwert der Teilfolge). Hinweis: Analysis 1.

**Aufgabe 27 Unvollständigkeit**

Sei $-\infty < a < b < \infty$. Wir betrachten auf dem Raum $C[a,b]$ der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[a,b]$ die Funktion $\|\cdot\| : C[a,b] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$\|f\| := \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

(a) Zeigen Sie, dass $\|\cdot\|$ eine Norm auf $C[a,b]$ ist.

(b) Zeigen Sie, dass $C[a,b]$ mit dieser Norm kein Banachraum ist.

**Aufgabe 28 Vollständigkeit und Abgeschlossenheit**

Zeigen Sie:

(a) Ein vollständiger Teilraum eines metrischen Raums ist abgeschlossen.

(b) Ein abgeschlossener Teilraum eines vollständigen metrischen Raums ist vollständig.

**Aufgabe 29 Stetigkeit und diskrete Räume**

Sei $X$ ein diskreter metrischer Raum und sei $Y$ ein beliebiger metrischer Raum. Zeigen Sie, dass jede Funktion $f : X \to Y$ stetig ist.

**Aufgabe 30 Stetigkeit**

Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

auf Stetigkeit in allen Punkten des $\mathbb{R}^2$. Hinweis: Machen Sie sich zunächst ein Bild von der Funktion.

**Aufgabe 31 Grenzwerte**

Zeigen Sie $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2} = 1$.

**Aufgabe 32 Abstandsfunktion zu einer kompakten Menge**

Für eine kompakte Teilmenge $K$ des metrischen Raumes $X$ und $x \in X$ definieren wir den Abstand von $x$ zu $K$ als $d(x,K) = \inf_{y \in K} d(x,y)$. Zeigen Sie:

(a) $d(x,K) > 0$ für $x \notin K$.

(b) Die Funktion $f : X \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = d(x,K)$ ist stetig.
Hinweis: Zeigen Sie $\big|d(x,K) - d(y,K)\big| \leq d(x,y)$.

(c) Das Infimum in der Definition von $d(x,K)$ wird angenommen.