Sommersemester 2016

A. Hinrichs, E. Lindner, F. Puchhammer, M. Ullrich

Übungen zur Vorlesung Analysis 2 – 7. Serie

Ankreuzen vor der Übung am 11.05.2016

Aufgabe 48 **Partielle Ableitungen höherer Ordnung**

Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung der Funktion $f(x,y) = \arctan\left(e^{xy}\right)$ für $x, y \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 49 **Partielle Ableitungen und Kettenregel**

Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion und sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x,y) = g(x+2y)$. Zeigen Sie für $a, b \in \mathbb{N}_0$

$$\frac{\partial^{a+b} f}{\partial x^a \partial y^b} = 2^b g^{(a+b)}(x+2y).$$

Aufgabe 50 **Zum Vertauschungssatz von Schwarz**

Es sei

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{für} \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für} \quad (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die partiellen Ableitungen f_x, f_y, f_{xy}, f_{yx} überall existieren, dass f_x und f_y stetig sind, aber $f_{xy}(0,0) \neq f_{yx}(0,0)$ ist. Warum ist das kein Widerspruch zum Satz von Schwarz?

Aufgabe 51 **Multinomialkoeffizienten und Multinomische Formel**

Wiederholen Sie die Multiindexschreibweise aus Skript und Vorlesung. Zeigen Sie für $x = (\xi_1, \dots, \xi_d) \in \mathbb{R}^d$ und $k \in \mathbb{N}_0, d \in \mathbb{N}$ die multinomische Formel

$$(\xi_1 + \cdots + \xi_d)^k = \sum_{|\alpha|=k} \binom{k}{\alpha} x^\alpha.$$

Hierbei geht die Summe über alle Multiindizes $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{N}_0^d$ mit $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d = k$. Berechnen Sie damit $\sum_{|\alpha|=k} \binom{k}{\alpha}$.

Aufgabe 52 **Angewandte Kombinatorik**

(a) Wieviele Möglichkeiten gibt es, 32 Skatkarten zu verteilen? Dabei erhält jeder von drei Spielern 10 Karten, zwei Karten bleiben im Skat.

(b) Der Ort mit dem wohl längsten Namen ist

LLANFAIRPWLLGWYNGYLLGOGERYCHWYRNDROBWLLLLANTYSILIOGOGOGOCH

in Wales. Wieviele Wörter gibt es, die man aus diesen Buchstaben bilden kann? (Dabei sollen alle Buchstaben des Wortes verwendet werden. Da die Wörter alle unaussprechlich sind, zählen wir jede Anordnung der Buchstaben als ein Wort.)

Aufgabe 53 **Taylorpolynome 1**

Berechnen Sie das Taylorpolynom 2. Ordnung von $f(x,y) = x^2 - 2xy + 3y^2 - 2x$ in $(1,-1)$. Welche Aussagen können Sie über das Restglied machen?

Aufgabe 54 **Taylorpolynome 2**

Berechnen Sie das Taylorpolynom 3. Ordnung von $f(x,y,z) = \sin x \cos y \, e^z$ in $(0,0,0)$.

Aufgabe 55 **Grundbegriffe der Vektoranalysis**

Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ein Vektorfeld mit den Komponentenfunktionen $f_i : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ für $i = 1, 2, 3$, also $f = (f_1, f_2, f_3)$. Weiter sei $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Die Divergenz des Vektorfeldes f ist

$$\operatorname{div} f := \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}.$$

Die Rotation des Vektorfeldes f ist

$$\operatorname{rot} f := \Big(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\Big).$$

Der Laplaceoperator angewendet auf g ist

$$\Delta g = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 g}{\partial x_i^2}.$$

(a) Zeigen Sie die Identität $\operatorname{div}(\nabla g) = \Delta g$. Welche Voraussetzungen muss man an g stellen?

(b) Zeigen Sie $\operatorname{rot}(\nabla g) = (0, 0, 0)$. Welche Voraussetzungen muss man an g stellen?

(c) Zeigen Sie $\operatorname{div}(\operatorname{rot} f) = 0$. Welche Voraussetzungen muss man an f stellen?