Sommersemester 2016

A. Hinrichs, E. Lindner, F. Puchhammer, M. Ullrich

Übungen zur Vorlesung Analysis 2 – 8. Serie

Ankreuzen vor der Übung am 18.05.2016

Aufgabe 56 Eine harmonische Funktion

Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y,z) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

Zeigen Sie, daß

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

für $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ gilt.

Aufgabe 57 Wärmeleitungsgleichung

Zeigen Sie, dass die Funktion $u : \mathbb{R}^d \times (0,\infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$u(x,t) = t^{-d/2}\, \mathrm{e}^{-\|x\|^2/(4t)}$$

eine Lösung der Wärmeleitungsgleichung

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial t}$$

ist. Hierbei ist $\Delta u = \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 u}{\partial \xi_i^2}$ der Laplaceoperator bezüglich der Ortskoordinate $x = (\xi_1, \ldots, \xi_d)$.

Aufgabe 58 Lokale Extrema I

Untersuchen Sie Funktion $f(x,y) = (4x^2+y^2)e^{-x^2-4y^2}$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ auf lokale Extremwerte (mit Bestimmung der Art des Extremums).

Aufgabe 59 Lokale Extrema II

Untersuchen Sie Funktion $f(x,y,z) = x^3+y^2+z^2+12xy+2z$ für $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ auf lokale Extremwerte (mit Bestimmung der Art des Extremums).

Aufgabe 60 Globales Extremum

An welcher Stelle $x_0 \in \mathbb{R}^d$ nimmt die Funktion

$$f(x) = \sum_{j=1}^{n} \|x - a_j\|^2$$

für gegebene $n \in \mathbb{N}$ und $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}^d$ ihr globales Minimum an?

Aufgabe 61 Inverse Funktion I

Gegeben sei die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x,y) = (y + \mathrm{e}^x, x - \mathrm{e}^y)$. Zeigen Sie, dass f überall lokal invertierbar ist mit einer differenzierbaren Umkehrfunktion. Bestimmen Sie $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ mit $f(x,y) = (1,-1)$ und berechnen Sie die Ableitung der Umkehrfunktion an der Stelle $(1,-1)$.

Aufgabe 62 Inverse Funktion II

Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch $f(x,y) = \frac{1}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie die Jacobi-Determinante von f.

(b) Zeigen Sie mit dem Satz über die inverse Funktion, dass f auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ invertierbar ist.

AUFGABE 63 **Inverse Funktion III**

Wir betrachten weiter die Abbildung f aus der vorhergehenden Aufgabe. Bestimmen Sie die Umkehrabbildung explizit und interpretieren Sie die Abbildung f geometrisch.