Sommersemester 2016

A. Hinrichs, E. Lindner, F. Puchhammer, M. Ullrich

Übungen zur Vorlesung Analysis 2 – 10. Serie

Ankreuzen vor der Übung am 01.06.2016

Lösen Sie die Aufgaben 70-74 mit dem Lagrange-Formalismus, auch wenn evtl. durch Auflösung eine Überführung in ein Extremalproblem ohne Nebenbedingungen möglich wäre.

Aufgabe 70 **Extrema mit Nebenbedingungen I**

Man berechne den Abstand des Punktes $(1, -1, 0)$ von dem Rotationshyperboloid

$$H = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}.$$

Hinweis: In der euklidischen Norm ist der Abstand eines Punktes (x_0, y_0, z_0) und einer Menge K definiert als

$$d = \inf_{(x,y,z)\in K} |(x_0, y_0, z_0) - (x, y, z)| = \inf_{(x,y,z)\in K} \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}.$$

Man kann statt d auch d^2 berechnen ...

Aufgabe 71 **Extrema mit Nebenbedingungen II**

Seien $a, b, c > 0$. Man bestimme den volumengrößten achsenparallelen Quader, der dem Ellipsoid

$$\left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\right\}$$

einbeschrieben ist.

Aufgabe 72 **Extrema mit Nebenbedingungen III**

Ein ehemaliger Mathematikstudent vermietet als Kleinkunstunternehmer Zelte für Flugveranstaltungen von Fledermäusen. Für den Bau der quaderförmigen Zelte stehen ihm für die 12 Kanten Stangen der Gesamtlänge $L > 0$ und für die 6 Seitenflächen (inklusive Boden) Planen der Gesamtfläche $S > 0$ zur Verfügung. Da er sein Studium bereits nach dem ersten Semester abgebrochen hat, fragt er nun seine ehemaligen Kommilitonen, ob die Seitenlängen $a, b, c > 0$ so gewählt werden können, dass alles Material verbraucht wird und das Zeltvolumen maximal wird. Für welche Parameter S und L ist es überhaupt möglich, ein solches Zelt zu bauen? Für welche Wahl von a, b, c erhält man dann das maximale Zeltvolumen?

Aufgabe 73 **Extrema mit Nebenbedingungen IV**

Man bestimme das globale Maximum und das globale Minimum der Funktion $f(x, y) = 4x^2 - 3xy$ auf der Kreisscheibe $K = \{(x, y) \,:\, x^2 + y^2 \le 1\}$.

Aufgabe 74 **Schokolade**

Eine Firma kauft jeden Tag 1000 Rohschokoloadeeinheiten (kurz RSE) Rohschokolade ein, um daraus ihre sehr beliebten Pralinen herzustellen, wozu ihr drei Maschinen zur Verfügung stehen. Die erste stellt aus jeder RSE Pralinen im Wert von 3200 Pralinenwährungseinheiten (PWE) her, verursacht jedoch pro Tag 500000 PWE Fixkosten. Die zweite Maschine hat Fixkosten von 200000 PWE und stellt aus x RSE Pralinen im Wert von $5600x - 4x^2$ PWE her, wobei der quadratische Term auf mit zunehmender Auslastung steigende Schokoladenverdunstung zurückzuführen ist. Die dritte Maschine stellt aus x RSE Pralinen im Wert von $8800x - 12x^2$ PWE her. Sie verursacht keine Fixkosten, jedoch zweigen die sie betreibenden Subunternehmer illegalerweise die Hälfte der Rohschokolade für eigene Zwecke ab. Wie müssen die 1000 RSE pro Tag auf die drei Maschinen aufgeteilt werden, damit der Erlös maximal wird? Formulieren Sie das Problem als Minimierungsproblem unter Nebenbedingungen und lösen Sie es mit Hilfe des Lagrange-Formalismus.

Aufgabe 75 **Rektifizierbare Wege**

Skizzieren Sie die folgenden Wege und berechnen Sie deren Längen:

(a) $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$ mit $t \in [0, 2\pi]$.

(b) $\gamma(t) = (3t, 3t^2, 2t^3)$ mit $t \in [0, 1]$.