

Übungen zur Vorlesung Analysis 2 – 12. Serie

ANKREUZEN VOR DER ÜBUNG AM 22.06.2016

AUFGABE 85 Stammfunktionen und Potentiale

Bestimmen Sie, falls möglich, eine Stammfunktion zu den folgenden Vektorfeldern $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

(a) $f(x, y, z) = (x + z, -y - z, x - y)$

(b) $f(x, y, z) = (x^2, ze^x, xy \sin z)$

(c) $f(x, y, z) = (x(x + 2) \exp(x + y) \arctan(z), x^2 \exp(x + y) \arctan(z), x^2 \exp(x + y)/(1 + z^2))$

(d) $f(x, y, z) = (x - 2yz, xy - y, -xz)$

AUFGABE 86 Eigenschaften des Riemann-Integrals

Zeigen Sie für eine beschränkte stetige Funktion $f : D \rightarrow (0, \infty)$ auf einer Jordan-messbaren Menge $D \subseteq \mathbb{R}^d$ die Ungleichung

$$\int_D f(x) \, dx \cdot \int_D \frac{1}{f(x)} \, dx \geq (\text{vol}(D))^2.$$

AUFGABE 87 Multivariate Integration - Rechteckbereiche

Berechnen Sie die folgenden Integrale über die angegebenen Gebiete. Führen Sie die Schritte detailliert aus.

(a) $\int_D x^2 y \, d(x, y)$ mit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$

(b) $\int_D \sin(x + y) \, d(x, y)$ mit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\}$

(c) $\int_D |\cos(x + y)| \, d(x, y)$ mit $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi\}$

AUFGABE 88 Kein Fubini

Berechnen Sie die beiden iterierten Integrale

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \, dy \, dx \quad \text{und} \quad \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \, dx \, dy.$$

Warum kann man hier den Satz von Fubini nicht anwenden?

AUFGABE 89 Normalbereiche I

Beschreiben Sie das Dreieck D mit den Eckpunkte $(1, 3)$, $(3, 1)$ und $(5, 5)$ als Normalbereich und bestimmen Sie $\int_D x^2 \, d(x, y)$.

AUFGABE 90 Normalbereiche II

Beschreiben Sie den Ellipsoiden $E := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1\}$ mit gegebenen Halbachsen $a, b, c > 0$ als Normalbereich und berechnen Sie dessen Volumen.

AUFGABE 91 Inhaltsberechnung

Skizzieren Sie die Menge $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + y \leq 2, x^2 \leq y\}$ und berechnen Sie deren Flächeninhalt.

AUFGABE 92 Fubini-Praxis

Vertauschen Sie die Integrationsreihenfolge in den folgenden Integralen.

(a) $\int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x, y) \, dy \, dx$

(b) $\int_{-1}^1 \int_{y^2-1}^{1-y^2} f(x, y) \, dx \, dy$