Sommersemester 2016

A. Hinrichs, E. Lindner, F. Puchhammer, M. Ullrich

Übungen zur Vorlesung Analysis 2 – 13. Serie

Ankreuzen vor der Übung am 29.06.2016

Aufgabe 93 **Volumenberechnung und Substitutionsregel**

Benutzen Sie geeignete Koordinaten und die Substitutionsregel, um die Volumina der folgenden Mengen zu berechnen.

(a) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 \leq z \leq x + y\}$.

(b) $B = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 \leq az,\ x, y, z \geq 0\}$ für eine gegebene Konstante $a > 0$

Aufgabe 94 **Flächenberechnung I**

Berechnen Sie den Inhalt des Teils des durch die Gleichung $x^2 + \frac{y^2}{2} = 1$ gegebenen Zylindermantels, der innerhalb des Zylinders mit der Gleichung $x^2 + \frac{z^2}{4} \leq 1$ liegt.
Hinweis: Suchen Sie hier und in den folgenden Aufgaben geeignete Parametrisierungen.

Aufgabe 95 **Flächenberechnung II**

Berechnen Sie den Inhalt des Teils des durch die Gleichung $y^2 + z^2 = x^2$ gegebenen Kegelmantels, der innerhalb des Zylinders mit der Gleichung $x^2 + y^2 \leq 1$ liegt.

Aufgabe 96 **Flächenberechnung III**

Berechnen Sie den Inhalt des Teils der Fläche, die durch die Gleichung $z^2 = 2x$ gegeben ist, der von den Flächen $x = 1$ und $y^2 = 4x$ abgeschnitten wird.

Aufgabe 97 **Oberflächenintegrale 1. Art**

Auf der Oberfläche der Kugel mit dem Radius R sei Masse mit der Dichte h verteilt. Berechnen Sie jeweils die Gesamtmasse der Kugeloberfläche.

(a) $h(x, y, z) = \max\{|x|, |y|\}$

(b) $h(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Aufgabe 98 **Flächenberechnung - Das Viviani-Fenster**

Aus einer Kugel mit dem Radius 2 werden parallel zwei zylindrische Löcher vom Radius 1 herausgebohrt, die sich nicht überlappen und in einem Durchmesser der Kugel berühren. Veranschaulichen Sie sich den entstehenden Körper und berechnen Sie den Inhalt des verbleibenden Teils der Kugeloberfläche.

Aufgabe 99 **Mantelfläche von Rotationskörpern**

Rotiert der Graph einer Funktion $y = f(x) \geq 0, a \leq x \leq b$ um die x-Achse, so beschreibt er die Mantelfläche eines Rotationskörpers. Nutzen Sie Oberflächenintegrale 1. Art, um eine Formel für die Berechnung dieser Mantelfläche herzuleiten. Berechnen Sie die Mantelfläche und das Volumen von *Gabriels Horn = Toricellis Trompete*, das ist der Rotationskörper zu $y = f(x) = \frac{1}{x}$ mit $1 \leq x \leq b$. Was passiert mit Volumen und Oberfläche beim Grenzübergang $b \to \infty$?

Aufgabe 100 **Oberflächenintegrale 2. Art I**

Berechnen Sie den Fluss des Geschwindigkeitsfeldes $F(x, y, z) = (2z, x + y, 0)$ für $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ durch das Flächenstück S der Ebene $x + 2y + 3z = 4$ im ersten Oktanten.

Aufgabe 101 **Oberflächenintegrale 2. Art II**

Berechnen Sie (direkt) den Fluss des Geschwindigkeitsfeldes $F(x, y, z) = (2z, x + y, 0)$ für $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ durch die Sphäre S gegeben durch $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$. Berechnen Sie (ebenfalls direkt)

$$\int_{x^2+y^2+z^2 \leq R^2} \operatorname{div} F \ d(x, y, z).$$