Wintersemester 2016/2017
A. Hinrichs, M. Passenbrunner, F. Puchhammer, V. Sturm, A. Thalhammer

Übungen zur Vorlesung Mathematik 3 – 2. Serie

Ankreuzen vor der Übung am 19.10.2016

Aufgabe 1 **DGL-Systeme 1. Ordnung I**

Überführen Sie die folgenden Differentialgleichungen in ein (falls möglich explizites) Differentialgleichungssystem erster Ordnung.

(i) $y^{(4)}(x) + 4y(x) = 1 + x + x^2$

(ii) $y''(x)y'''(x) + 3y''(x)y'(x) + y(x) = 4\sin(x)$

Aufgabe 2 **DGL-Systeme 1. Ordnung II**

Seien $f_1, f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Überführen Sie das Differentialgleichungssystem

$$x''(t) = f_1(x(t), y(t)), \quad y''(t) = f_2(x(t), y(t))$$

in ein System erster Ordnung.
Schreiben Sie im Falle

$$f_1(x, y) = 3x + 4y + 1, \qquad f_2(x, y) = x - 2y - 1$$

das erhaltene System in Matrix-Vektor-Form analog zu Beispiel 2.2 im Skript.

Aufgabe 3 **Richtungsfelder und Lösungskurven I**

Zeichnen Sie die Richtungsfelder der folgenden Differentialgleichungen und skizzieren Sie jeweils einige Lösungskurven:

(i) $x'(t) = x(t) + t$,

(ii) $x'(t) = x(t)/t$,

(iii) $x'(t) = t/x(t)$.

Aufgabe 4 **Richtungsfelder und Lösungskurven II**

Zeichnen Sie das Richtungsfeld der Differentialgleichung $x'(t) = t$, zeichnen Sie einige Lösungskurven und zeigen Sie, dass für den Startwert $(x_0, t_0) = (0, 0)$ und die Schrittweite $h > 0$ für den zugehörigen Eulerschen Polygonzug $x^{(h)}$ gilt

$$x^{(h)}(nh) = x_n = \frac{(nh)^2}{2} - \frac{nh^2}{2}.$$

Bonusproblem: Zeigen Sie, dass für alle $t > 0$ gilt $\lim_{h\to 0} x^{(h)}(t) = t^2/2$. Der Eulersche Polygonzug konvergiert in diesem Beispiel also gegen die Lösung der DGL $x'(t) = t$ mit Anfangswert $x(0) = 0$.