*Wintersemester 2016/2017*
A. Hinrichs, A. Lindner

# Übungen zur Vorlesung Analysis 1 für Lehramt – 2. Serie

Ankreuzen vor der Übung am 19.10.2016

---

Aufgabe 9 **Wahrheitstafeln**

Seien $A, B, C$ beliebige Aussagen. Zeigen Sie die folgenden Tautologien mittels Wahrheitstafeln.

(a) $A \vee (B \wedge C) \iff (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

(b) $\neg(A \vee B) \iff (\neg A) \wedge (\neg B)$

Aufgabe 10 **Injektivität, Surjektivität, Bijektivität**

Seien $X, Y, Z$ Mengen und $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ Funktionen. Außerdem sei $h = g \circ f : X \to Z$ die Verknüpfung von $g$ und $f$ gegeben durch $h(x) = g(f(x))$. Beweisen Sie:

(a) Sind $f$ und $g$ injektiv, so ist auch $h$ injektiv.

(b) Sind $f$ und $g$ surjektiv, so ist auch $h$ surjektiv.

(c) Sind $f$ und $g$ bijektiv, ist auch $h$ bijektiv. Geben Sie eine Formel für $h^{-1}$ an.

Bonusfrage: Kann man in (a), (b) oder (c) eine der Voraussetzungen weglassen? Gelten in (a), (b) oder (c) auch die umgekehrten Implikationen?

Aufgabe 11 **Das Urbild bezüglich einer Funktion**

Sei $f : X \to Y$ eine Funktion. Für eine Teilmenge $C \subseteq Y$ ist

$$f^{-1}(C) := \{x \in X \,:\, f(x) \in C\} \subseteq X$$

das *Urbild* von $C$ unter $f$. Seien nun $C, D \subseteq Y$. Beweisen oder widerlegen Sie die Formel

$$f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D) = f^{-1}(C \cup D).$$

Aufgabe 12 **Das Bild bezüglich einer Funktion**

Sei $f : X \to Y$ eine Funktion. Für eine Teilmenge $A \subseteq X$ ist

$$f(A) := \{f(x) \,:\, x \in A\} \subseteq Y$$

das *Bild* von $A$ unter $f$. Seien nun $A, B \subseteq X$. Welche der folgenden Eigenschaften gilt allgemein? Geben Sie entweder einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an!

(a) $f(A) \cup f(B) = f(A \cup B)$

(b) $f(A \setminus B) \subseteq f(A) \setminus f(B)$

(c) $f(A) \setminus f(B) \subseteq f(A \setminus B)$,

(d) $f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

Aufgabe 13 **Operationen I**

Auf $\mathbb{R}$ sei eine Operation $\circ$ gegeben durch $x \circ y = x + 3y$.

(a) Ist diese Operation assoziativ?

(b) Ist diese Operation kommutativ?

(c) Existiert ein neutrales Element?

**Aufgabe 14 Operationen II**

Sei $Abb(X)$ die Menge aller Abbildungen $f : X \to X$ auf einer nichtleeren Menge $X$ und

$$\circ : Abb(X) \times Abb(X) \to Abb(X)$$

die Operation der Hintereinanderausführung zweier Abbildungen auf $X$, also $(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big)$.

(a) Ist diese Operation assoziativ?

(b) Ist diese Operation kommutativ?

(c) Existiert ein neutrales Element?

(d) Existieren inverse Elemente?

**Aufgabe 15 Körperaxiome**

Beweisen Sie ausführlich mittels der Körperaxiome die folgende Aussage aus der Vorlesung: Sei $K$ ein Körper und seien $x, y \in K$ mit $x \neq 0$. Wenn $x \cdot y = x$ ist, dann ist $y = 1$.

**Aufgabe 16 Körper**

Auf $\mathbb{R}$ seien die Operationen $x \oplus y := x + y$ und $x \otimes y := \frac{xy}{2}$ gegeben. Ist dann $(\mathbb{R}, \oplus, \otimes)$ ein Körper?