Wintersemester 2016/2017

A. Hinrichs, M. Passenbrunner, F. Puchhammer, V. Sturm, A. Thalhammer

Übungen zur Vorlesung Mathematik 3 – 3. Serie

Ankreuzen vor der Übung am 9.11.2016

Aufgabe 9 **Trennung der Variablen I**

Lösen Sie folgende Anfangswertprobleme mit der Methode der Trennung der Variablen:

(i) $x^2 y'(x) = \sin\left(\frac{1}{x}\right),\ y\left(\frac{2}{\pi}\right) = 0$, wobei $x > 0$.

(ii) $y'(x) = -x^2\, \mathrm{e}^{y(x)},\ y(0) = 1$. Bestimmen Sie zudem den maximalen Definitionsbereich der Lösung.

Aufgabe 10 **Trennung der Variablen II**

Bestimmen Sie die Lösungen zu

(i) $xy(x) - (x+1)y'(x) = 0,\ y(0) = 1$ für $x \geq 0$.

(ii) $y(x)y'(x)(1-x^2) - x(1-y^2(x)) = 0,\ y\left(-\frac{1}{2}\right) = 2$ für $x \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, wobei Sie aus Experimenten bereits wissen, dass $y > 1$.

Aufgabe 11 **Alte Bekannte**

Finden Sie mit der Methode der Trennung der Variablen Lösungen zu den Anfangswertproblemen

(i) $y^2(x) + (y'(x))^2 = 1$, $y(0) = 0$, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

(ii) $1 + y^2(x) = -y'(x)$, $y(-\pi/2) = 0$, $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, 0\right)$.

Welche (altbekannten) Identitäten haben Sie hiermit bewiesen?

Aufgabe 12 **Picard-Lindelöf**

Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$x'(t) = 2tx(t), \quad x(0) = 1.$$

(i) Zeigen Sie, dass die Voraussetzungen (d.h. die Lipschitzbedingung) für die Anwendung des Satzes von Picard-Lindelöf auf dem Quader $Q_{1/2,3/2}$ erfüllt sind.

(ii) Bestimmen Sie das maximale Intervall auf dem dieser Satz eine eindeutige Lösung garantiert und zeigen Sie $|\varphi_3(t) - x(t)| \leq 5/(3 \cdot 2^8)$.

(iii) Berechnen Sie φ_3 und stellen Sie eine Vermutung auf, wie die Lösung aussehen könnte.