Wintersemester 2016/2017
A. Hinrichs, A. Lindner

Übungen zur Vorlesung Analysis 1 für Lehramt – 3. Serie

Ankreuzen vor der Übung am 9.11.2016

Aufgabe 17 **Betrag**

Zeigen Sie für $x, y \in \mathbb{R}$ die Äquivalenz $|x| \geq |y| \iff x^2 \geq y^2$.

Aufgabe 18 **Ungleichungen - Lösungsmengen**

Stellen Sie die Menge der Lösungen $x \in \mathbb{R}$ der folgenden Ungleichungen in Form von Vereinigungen von Intervallen dar. Veranschaulichen Sie sich die Ungleichungen und Lösungsmengen durch Betrachtung geeigneter Funktionsgraphen

(a) $|3x - 5| > |2x + 3|$

(b) $|x - 3| + |x + 3| > 8$

(c) $|x + 1| - |x| + |x - 1| < 2$

(d) $3x^2 + 6x - 8 > 1$

Aufgabe 19 **Ungleichungen**

(a) Beweisen Sie für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $b, d > 0$ die Aussage $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \iff ad < bc$.

(b) Beweisen Sie für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ mit $b, d > 0$ die Aussage $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Longrightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.

Geben Sie in Ihren Beweisen detailliert an, welche Eigenschaften der Ordnung aus der Vorlesung Sie jeweils benutzen!

Aufgabe 20 **Betrag, Maximum, Minimum**

Seien $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie die Formeln

$$\max\{x, y\} = \frac{x + y + |x - y|}{2} \qquad \text{und} \qquad \min\{x, y\} = \frac{x + y - |x - y|}{2}.$$

Aufgabe 21 **Dreiecksungleichung für n Zahlen**

Zeigen Sie für $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ die Ungleichung

$$|x_1 + \cdots + x_n| \leq |x_1| + \cdots + |x_n|.$$

Aufgabe 22 **Induktion - Gleichungen**

(a) Beweisen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

(b) Beweisen Sie, dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{k=1}^{n} k(k^2 + 1) = \frac{n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n}{4}$.

(c) Beweisen Sie für $n \in \mathbb{N}_0$ und $x \neq 1$ die Formel

$$\left(1 + x\right)\left(1 + x^2\right)\left(1 + x^4\right) \cdots \left(1 + x^{2^n}\right) = \frac{1 - x^{2^{n+1}}}{1 - x}.$$

Aufgabe 23 **Induktion - kleine Forschungsaufgabe**

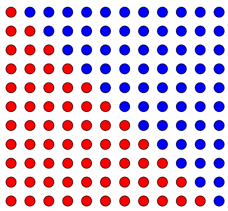
Sei
$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)}.$$
Berechnen Sie die ersten Terme S_1, S_2, S_3, S_4 und stellen Sie eine Vermutung über den Wert von S_n auf. Beweisen Sie diese Vermutung durch vollständige Induktion.

Aufgabe 24 **Die etwas andere Aufgabe – Beweise ohne Worte**

In der Vorlesung haben wir mittels vollständiger Induktion die Formel

$$1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

bewiesen. Das folgende Bild stellt einen „Beweis ohne Worte" für diese Formel dar:



Dieses Bild zeigt auch, warum die Zahlen $\Delta_n = \frac{n(n+1)}{2}$ Dreieckszahlen genannt werden.
Finden Sie einen Beweis ohne Worte dafür, dass die Summe zweier aufeinanderfolgender Dreieckszahlen eine Quadratzahl ist.
Finden Sie einen Beweis ohne Worte für die Formel

$$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n-1) = n^2.$$