Wintersemester 2016/2017
A. Hinrichs, A. Lindner

Übungen zur Vorlesung Analysis 1 für Lehramt – 4. Serie

Ankreuzen vor der Übung am 16.11.2016

Aufgabe 25 **Induktion - Ungleichungen**

(a) Beweisen Sie, dass für $n = 2, 3, \ldots$ gilt: $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} > \sqrt{n}$.

(b) Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt $2^n > n^3$? Begründen Sie Ihre Aussage!

Aufgabe 26 **Supremum und Infimum 1**

Bestimmen Sie Supremum und Infimum folgender Mengen. Entscheiden Sie jeweils, ob ein Maximum und/oder ein Minimum existiert.

(a) $M = \left\{\frac{1}{n} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$.

(b) $M = \left\{\frac{n}{2n+1} \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$.

(c) $M = \left\{\frac{(-1)^m}{m} + \frac{(-1)^n}{n} \ : \quad m, n \in \mathbb{N}\right\}$.

(d) $M = \left\{\frac{|x|}{1+|x|} \ : \ x \in \mathbb{R}\right\}$.

Aufgabe 27 **Supremum und Infimum 2**

Seien $A, B \subset \mathbb{R}$ nichtleere beschränkte Mengen. Wir setzen $A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}$ und $A - B := \{a - b : a \in A, b \in B\}$. Zeigen Sie:

(a) $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$,

(b) $\inf(A - B) = \inf A - \sup B$,

Hinweis zu (b): Sie dürfen Teil (a) benutzen.

Aufgabe 28 **Supremum und Infimum 3**

Seien wieder $A, B \subset \mathbb{R}$ nichtleere beschränkte Mengen. Zeigen Sie $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$. Gibt es eine Analogie für $\sup(A \cap B)$?

Aufgabe 29 **Komplexe Zahlen - Grundrechenarten**

Gegeben seien die komplexen Zahlen $a = 1 + 2\mathrm{i}$ und $b = 2 - \mathrm{i}$. Berechnen Sie $a + b, a - b, ab, \frac{a}{b}$ und stellen Sie diese komplexen Zahlen gemeinsam mit a und b in der Gaußschen Zahlenebene dar.

Aufgabe 30 **Komplexe Zahlen - Potenzen**
Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $x + \mathrm{i}y$ mit reellen Zahlen x, y dar:

(a) i^{2012}

(b) $\left(\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{42}$

(c) $(-\sqrt{5} + \mathrm{i}\sqrt{5})^3(1 + \mathrm{i})^2$

(d) $\left(\frac{4 + \mathrm{i}^7}{2 + \mathrm{i}^{13}}\right)^2$

(e) $\left(-1 - \mathrm{i}\sqrt{3}\right)^3\left(-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}\right)^3$.

Aufgabe 31 **Parallelogrammgleichung**

Es seien z und w beliebige komplexe Zahlen. Beweisen Sie $|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$ und deuten Sie das Ergebnis geometrisch.

Aufgabe 32 **Mengen in der Gaußschen Zahlenebene**

Skizzieren Sie die folgenden Mengen komplexer Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene :

(a) $\{z \in \mathbb{C} \ : \ \operatorname{Im}(2z + 1) < -1\}$

(b) $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| - \overline{z} = 1 + 2\mathrm{i}\}$

(c) $\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z - 1 + \mathrm{i}| = |z - 3 - 5\mathrm{i}|\}$

(d) $\left\{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| \leq 1 \, , \ \left|z - \frac{1}{2}\right| \geq \frac{1}{2}\right\}$