A. Hinrichs, M. Passenbrunner, F. Puchhammer, V. Sturm, A. Thalhammer

Übungen zur Vorlesung Mathematik 3 – 4. Serie

Ankreuzen vor der Übung am 16.11.2016

Aufgabe 13 **Picard-Lindelöf & sukzessive Approximation**

Wir betrachten das Anfangswertproblem $x'(t) = (t-1)x(t)$, $x(0) = 1$.

1. Bestimmen Sie ein Lösungsintervall I ausgehend von $u = v = 3$ (vgl. Satz 4.7).
2. Berechnen Sie $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ mit der Methode der sukzessiven Approximation, mit den Anfangswerten $t_0 = 0, x_0 = 1$.
3. Schätzen Sie die Fehler von $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ auf dem Lösungsintervall I ab.
4. Berechnen Sie die exakte Lösung des Anfangswertproblems.
5. Vergleichen Sie die Näherungen $\varphi_1(t), \varphi_2(t)$ für $t = \frac{2}{10}$ mit der exakten Lösung. Vergleichen Sie die tatsächlichen Fehler mit der Abschätzung aus (3).

Aufgabe 14 **Fehlerfortpflanzung und Übertragungsmatrix I**

Wir betrachten das Anfangswertproblem $x'(t) = -x(t)^2, \qquad x(1) = x_0$.

1. Bestimmen Sie Lösung des AWP und die Übertragungsmatrix.
2. Berechnen Sie den näherungsweisen Fehler

$$\left(\frac{\partial x}{\partial x_0}(t; t_0, x_0)\right)\delta x_0$$

wenn der Anfangswert $x(1) = \frac{1}{2} + \frac{1}{100}$ statt $x(1) = \frac{1}{2}$ ist. Vergleichen Sie mit dem tatsächlichen Fehler

$$|x(t, t_0, x_0 + \delta x_0) - x(t, t_0, x_0)|$$

für $t = 3$.

Aufgabe 15 **Lineares Differentialgleichungssystem I**

Wir betrachten das folgende Differentialgleichungssystem 1. Ordnung:

$$x_1'(t) = \frac{1}{t}x_1(t) + \frac{4}{t}x_2(t)$$
$$x_2'(t) = -\frac{1}{t}x_1(t) - \frac{4}{t}x_2(t).$$

1. Zeigen Sie, dass

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{t^3} \\ -\frac{1}{t^3} \end{pmatrix}$$

Lösungen des Differentialgleichungssystems sind. Leiten Sie daraus ab, dass

$$x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + \frac{b}{t^3} \\ -\frac{a}{4} - \frac{b}{t^3} \end{pmatrix}$$

mit Konstanten a, b die allgemeine Lösung ist.

2. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems mit Anfangsbedingungen $x_1(1) = 2, x_2(1) = 1$.

Aufgabe 16 **Fehlerfortpflanzung und Übertragungsmatrix II**

Wir betrachten weiter das Differentialgleichungssystem aus Aufgabe 15.

1. Bestimmen Sie die Lösung des Anfangswertproblems mit variablen Anfangsbedingungen $x_1(1) = x_1, x_2(1) = x_2$.
2. Bestimmen Sie die Übertragungsmatrix.
3. Bestimmen Sie näherungsweise den Fehler für $x_1 = 2 + \delta_1, x_2 = 1 + \delta_2$ in Abhängigkeit von t.