Wintersemester 2016/2017
A. Hinrichs, A. Lindner

Übungen zur Vorlesung Analysis 1 für Lehramt – 6. Serie

Ankreuzen vor der Übung am 30.11.2016

Aufgabe 41 Wahr oder falsch?

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie die wahren Aussagen, widerlegen Sie die falschen Aussagen jeweils durch ein Gegenbeispiel.

(a) Jede konvergente Folge ist monoton und beschränkt.

(b) Jede monotone Folge ist konvergent.

(c) Jede konvergente Folge ist monoton.

(d) Nullfolgen sind entweder streng monoton steigend oder streng monoton fallend.

(e) Eine konstante Folge kann keine Nullfolge sein.

(f) Eine streng monoton fallende Folge ist stets eine Nullfolge.

(g) Eine streng monoton wachsende Folge ist niemals eine Nullfolge.

Aufgabe 42 Eigenschaften von Folgen

Untersuchen Sie die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Monotonie, Beschränktheit und Konvergenz.

(a) $a_n = -\dfrac{2}{n}$ (b) $a_n = \dfrac{n^2-1}{n}$ (c) $a_n = (-1)^n 4^n$

Aufgabe 43 Konvergenz - Arithmetische Mittel

Sei (a_n) eine konvergente Folgen reeller Zahlen und sei $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

(a) Zeigen Sie, dass die Folge der arithmetischen Mittel $\left(\dfrac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}\right)_{n=1}^{\infty}$ gegen a konvergiert.

(b) Geben Sie ein Beispiel für eine Folge reeller Zahlen an, deren arithmetische Mittel konvergieren, die aber selbst nicht konvergent ist.

Aufgabe 44 Grenzwerte - I

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n}{1+x^{2n}}$ für gegebenes $x \in \mathbb{R}$

(b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$

(c) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)!}{(n+2)! - n!}$

Aufgabe 45 Grenzwerte - II

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{n!}{n^n}$

(b) $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 5^n + 7^n}$

Aufgabe 46 **Noch ein paar Grenzwerte**

Bestimmen Sie $\lim_{n\to\infty} a_n$.

(a) $a_n = \frac{3n^2 - 4n + 3}{2 - n - 5n^2}$

(b) $a_n = \frac{9^n}{10^n(n+1)}$

(c) $a_n = \sqrt{16n^2 - 6n - 6} - 4n$

Hinweis zu (c): $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Aufgabe 47 **Monotoniekriterium**

Die Folge (a_n) sei gegeben durch

$$a_1 = \sqrt{2},\ a_2 = \sqrt{2 + \sqrt{2}},\ a_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}},\ \ldots.$$

Es gilt also die Rekursionsformel $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$.

(a) Zeigen Sie $0 < a_n < 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (Hinweis: Induktion)

(b) Zeigen Sie, dass die Folge (a_n) monoton ist. (Hinweis: (a))

(c) Zeigen Sie, dass (a_n) konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

Aufgabe 48 **Die Forschungsaufgabe - Teil 2**

Wir untersuchen die Folge aus Aufgabe 48 der 6. Serie weiter: Sei $x > 0$, $a_1 = 1$. Die Folge $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ sei induktiv durch $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right)$ gegeben.

(a) Zeigen Sie $a_n \geq \sqrt{x}$ für $n \geq 2$. (Hinweis: Die Ungleichung $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ könnte hilfreich sein.)

(b) Zeigen Sie, dass die Folge $(a_n)_{n=2}^{\infty}$ monoton und beschränkt ist.

(c) Zeigen Sie, dass (a_n) konvergent ist.

(d) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{n\to\infty} a_n$. War Ihre Vermutung aus Aufgabe 40 der 5. Serie korrekt?