Wintersemester 2016/2017
A. Hinrichs, A. Lindner

Übungen zur Vorlesung Analysis 1 für Lehramt – 7. Serie

Ankreuzen vor der Übung am 07.12.2016

Aufgabe 49 Endliche Summen

Berechnen Sie die folgenden Summen.

(a) $\sum_{k=2}^{5}(3k-3)$ (b) $\sum_{j=0}^{20} 2^j$ (c) $\sum_{\ell=0}^{n} \frac{1}{4^\ell}$

Aufgabe 50 Wahr oder falsch?

Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Begründen Sie die wahren Aussagen, widerlegen Sie die falschen Aussagen jeweils durch ein Gegenbeispiel.

(a) Ist (a_k) eine Nullfolge, dann ist $\sum_{k=1}^\infty a_k$ konvergent.
(b) Ist $\sum_{k=1}^\infty a_k$ konvergent, dann ist (a_k) eine Nullfolge.
(c) Ist (a_k) eine Nullfolge, dann ist $\sum_{k=1}^\infty (-1)^k a_k$ konvergent.
(d) Ist (a_k) eine monoton fallende Folge, dann ist $\sum_{k=1}^\infty (-1)^k a_k$ konvergent.
(e) Ist (a_k) eine monotone Nullfolge, dann ist $\sum_{k=1}^\infty (-1)^k a_k$ konvergent.

Aufgabe 51 Reihen sind Folgen von Partialsummen

Geben Sie zu den Folgen $(a_k)_{k=1}^\infty$ jeweils die zugehörige Partialsummenfolge (s_n) an und entscheiden Sie an der Konvergenz der Folge (s_n), ob und wogegen die Reihe $\sum_{k=1}^\infty a_k$ konvergiert.

(a) $a_k = k$ (b) $a_k = (-1)^k$ (c) $a_k = 4^{-k}$

Aufgabe 52 Berechnung von Reihen

Bestimmen Sie die Summe der Reihe $\sum_{k=0}^\infty \left(\frac{3}{2^k} + \frac{(-1)^k}{3^k}\right)$.

Aufgabe 53 Teleskopreihen I

Die Reihe $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k(k+1)}$ lässt sich leicht durch folgenden *Teleskopreihentrick* berechnen. Wir stellen die Reihenglieder $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ dar als Differenzen, von denen sich in der Partialsumme

$$s_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}$$

die Glieder teleskopartig aufheben. Wir erhalten $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k(k+1)} = \lim_{n\to\infty} s_n = 1$. Berechnen Sie mit diesem Trick die Summen der Reihen

(a) $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(42+k)(42+k+1)}$ (b) $\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(z+k)(z+k+1)}$ für $z \in \mathbb{C}, -z \notin \mathbb{N}$

Aufgabe 54 **Teleskopreihen II**

Berechnen Sie die Summe der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}$. Beweisen Sie dazu die Richtigkeit der Zerlegung $\frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+1}\right)$ und benutzen Sie diese.

Aufgabe 55 **Konvergenz und Divergenz von Reihen**

Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz oder Divergenz.

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{6^n}{n!}$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)\,5^n}{2^n\,3^{n+1}}$

(c) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^n}{(n+1)^n - 2n^n}$

(d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}$

Aufgabe 56 **Alternierende Reihen**

Untersuchen Sie die folgenden alternierenden Reihen auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \left(\sqrt[n]{3} - 1\right)$

(c) $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n+1}{n^2+1}$