Wintersemester 2016/2017
A. Hinrichs, A. Lindner

Übungen zur Vorlesung Analysis 1 für Lehramt – 8. Serie

Ankreuzen vor der Übung am 14.12.2016

Aufgabe 57 **Maximaler Definitionsbereich**

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen den größten Definitionsbereich $D \subseteq \mathbb{R}$, so dass $f : D \to \mathbb{R}$ wohldefiniert ist.

(a) $f(x) = x^{42} + 42x^2 + 5$ (b) $f(x) = \frac{x^{42}+3x^2+1}{x^2-2}$ (c) $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 8}$

Aufgabe 58 **Injektivität, Surjektivität, Bijektivität**

Skizzieren Sie die Funktionsgraphen der folgenden Funktionen. Bestimmen Sie, ob die Funktionen jeweils injektiv, surjektiv und/oder bijektiv sind. Ein Nachweis ist nicht verlangt. Bestimmen und skizzieren Sie im Fall der Bijektivität die Umkehrfunktion.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = 2x + 3$
(b) $f : [0,1] \to [0,4],\ f(x) = x^2$
(c) $f : [-1,1] \to [1,2],\ f(x) = x^2 + 1$
(d) $f : [-2,2] \to [0,2016],\ f(x) = x^4 + 42$

Aufgabe 59 **Gerade oder ungerade?**

Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt *gerade*, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung $f(-x) = f(x)$ gilt. Sie heißt *ungerade*, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung $f(-x) = -f(x)$ gilt.

(a) Welche Symmetrieeigenschaft hat der Graph einer geraden Funktion?
(b) Welche Symmetrieeigenschaft hat der Graph einer ungeraden Funktion?
(c) Gibt es eine Funktion, die sowohl gerade als auch ungerade ist?
(d) Bestimmen Sie für die Funktionen

$$f(x) = \frac{x^{42} + 3x^2 + 1}{x^2 + 2}, \qquad g(x) = x^5 + 7x, \qquad h(x) = |x - 1|,$$

ob sie gerade, ungerade oder keines von beiden sind.

Aufgabe 60 **Die Sägezahnfunktion**

Das größte Ganze $[x]$ einer reellen Zahl x ist die größte ganze Zahl kleiner oder gleich x, also $[x] = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\}$. Die Funktion zack : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist definiert durch $\mathrm{zack}(x) = \big|[x + 1/2] - x\big|$.

(a) Zeichnen Sie den Graph der Funktion zack.
(b) Zeigen Sie $\mathrm{zack}(x) = |x|$ für $|x| \leq \frac{1}{2}$.
(c) Zeigen Sie, dass zack 1-periodisch ist, also $\mathrm{zack}(x + n) = \mathrm{zack}(x)$ für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt.
(d) Zeigen Sie, dass zack eine gerade Funktion ist.

<u>Aufgabe 61</u> **Algebraische Operationen und Komposition**

Seien die Funktionen $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben als $f(x) = x^2$ und $g(x) = x^3 + 1$. Bestimmen Sie die Funktionen $f + g, (f - g)g, f \circ g, g \circ f$.

<u>Aufgabe 62</u> **Stetigkeit - ε-δ-Definition**

Wir betrachten die Funktion $f(x) = \sqrt[3]{|x|}$ für $x \in \mathbb{R}$ und wollen direkt mit der ε-δ-Definition einsehen, dass f im Punkt $x_0 = 0$ stetig ist.

(a) Bestimmen Sie zu $\varepsilon = \frac{1}{10}$ ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

(b) Bestimmen Sie zu $\varepsilon = \frac{1}{100}$ ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

(c) Bestimmen Sie zu beliebigem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ mit der Eigenschaft $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

<u>Aufgabe 63</u> **Positiver und negativer Teil reeller Funktionen**

Für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definieren wir die Funktionen $f_+, f_- : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$f_+(x) = \begin{cases} f(x) & \text{falls} \quad f(x) \geq 0 \\ 0 & \text{falls} \quad f(x) < 0 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad f_-(x) = \begin{cases} -f(x) & \text{falls} \quad f(x) \leq 0 \\ 0 & \text{falls} \quad f(x) > 0 \end{cases} .$$

Zeigen Sie:

(a) Es gilt $f = f_+ - f_-$ und $|f| = f_+ + f_-$.

(b) Ist f stetig, dann sind f_+ und f_- stetig.

<u>Aufgabe 64</u> **Stetigkeit, gleichmäßige Stetigkeit, Lipschitz-Stetigkeit I**

Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = \frac{1}{x^2}$ auf den angegebenen Definitionsbereichen $D(f)$ auf Stetigkeit, gleichmäßige Stetigkeit und Lipschitz-Stetigkeit.

(a) $D(f) = (0, 1)$ (b) $D(f) = (1, \infty)$ (c) $D(f) = \left[\frac{1}{10}, 1\right]$