

## Übungen zur Vorlesung Analysis 1 für Lehramt – 9. Serie

ANKREUZEN VOR DER ÜBUNG AM 11.01.2017

---

### AUFGABE 65 Richtig oder falsch?

Welche der folgenden Aussagen über eine Funktion  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$  sind richtig, welche sind falsch?

- $f$  ist stetig in  $x_0 \in (a, b)$ , wenn  $f$  in  $x_0$  sowohl einen rechts- als auch einen linksseitigen Grenzwert besitzt und diese übereinstimmen.
- $f$  ist stetig in  $x_0 \in (a, b)$ , wenn  $f$  in  $x_0$  sowohl einen rechts- als auch einen linksseitigen Grenzwert besitzt und diese mit  $f(x_0)$  übereinstimmen.
- Ist  $f$  stetig, dann ist  $f$  beschränkt.
- Ist  $f$  stetig und besitzt eine Nullstelle in  $(a, b)$  und ist  $f$  nicht konstant, dann gibt es  $x_1, x_2 \in (a, b)$  mit  $f(x_1) < 0$  und  $f(x_2) > 0$ .

### AUFGABE 66 Anwendung Folgenstetigkeit

Seien  $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  drei Funktionen mit  $f \leq g \leq h$ . Zeigen Sie, dass  $g$  stetig in  $x_0 \in \mathbb{R}$  ist, wenn  $f$  und  $h$  stetig in  $x_0$  sind und  $f(x_0) = h(x_0)$  gilt.

### AUFGABE 67 Stückweise definierte Funktion und Stetigkeit

Für welche  $a \in \mathbb{R}$  ist die Funktion  $f(x) = \begin{cases} 1 - ax & , x < 1 \\ a - x^2 & , x \geq 1 \end{cases}$  stetig?

### AUFGABE 68 Grenzwerte I

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

$$(a) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 76x - 320}{x^2 - 6x + 8} \quad (b) \lim_{x \rightarrow 2} \sqrt{\frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - x - 2}} \quad (c) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{1 + 2x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$$

### AUFGABE 69 Grenzwerte II

Überprüfen Sie die Richtigkeit der folgenden Grenzwerte :

$$(a) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x|}{x} = 1 \quad (b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x|}{x} = -1 \quad (c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7 - 2x}{4x + 6} = -\frac{1}{2}$$

### AUFGABE 70 Grenzwerte III

- Berechnen Sie  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x + 42} - \sqrt{x}$ .
- Bestimmen Sie zu gegebenen  $a, b, c \in \mathbb{R}$  mit  $a > 0$  die Konstanten  $\alpha, \beta$  so, dass die Konvergenz  $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{ax^2 + bx + c} - ax - \beta = 0$  gilt.

### AUFGABE 71 Zwischenwertsatz I

Zeigen Sie, daß die Funktion  $f(x) = \frac{x^2 + 1}{x - 1} + \frac{x^6 + 1}{x - 2}$  mindestens eine Nullstelle in  $(1, 2)$  hat!

### AUFGABE 72 Zwischenwertsatz II

Zeigen Sie, dass es zu jeder Zeit zwei antipodische Punkte auf dem Erdäquator gibt (d.h. zwei Punkte, deren Verbindungsstrecke durch den Mittelpunkt der Erde geht), die die gleiche Temperatur haben. Hierbei wird die Temperaturverteilung als stetige Funktion vorausgesetzt.

## AUFGABE XMAS Die Weihnachtsaufgabe

Er wischte sich den Schweiß von der Stirn, die rotglänzend unter der gleichfarbigen Mütze hervorleuchtete. Dann strich er sich den bis über den runden Bauch reichenden weißen Bart glatt. Dieses Jahr hatte er ganz sicher gehen wollen. Und dann das.

Er hatte bis heute nicht ganz die Demütigung verwunden, die er vor einem Jahr erlitten hatte. Die letzte Station seiner alljährlichen Tour war ihm schon seit einigen Jahren die unangenehmste. Er hatte eine Wohngemeinschaft zu beglücken, in der 11 gleichaltrige Kinder samt diverser Elternteile hausten. Und die Mitglieder dieser Gemeinschaft hatten Ihren Kindern einen Gleichheitssinn anerzogen, den fanatisch zu nennen schon fast eine Untertreibung wäre. So brachte er allen jedes Jahr identische Geschenke. Letztes Jahr gab es 11 niedliche Kuschelbären. Beim Auspacken stellte sich heraus, daß einem der Bären die Schirmmütze fehlte, die alle anderen stolz auf ihrem Haupt trugen. Und das Gezeter startete sofort. Er solle sich zum Pol scheren, Versager, der er sei. Und wenn das nochmal passiere, werden sie künftig auf seine Dienste verzichten können. Das verletzte ihn zutiefst, und so wollte er dieses Jahr ganz sicher gehen.

Vor ihm lagen 12 identische Pakete. Er hatte sie bei einem Ebay-Powerseller erstanden, 12 identische, um ganz sicher zu gehen, falls bei der Post wiederum was verschwand. Vor ihm lag auch der Brief des Verkäufers. In dem stand, dass leider nur noch 11 identische Kuschelmäuse im Lager gewesen seien, in das zwölfte Paket habe er als Ersatz einen der Kuschelbären gelegt, die im letzten Jahr der Verkaufsschlager waren. Und alle Pakete gleich verpackt, wie gewünscht. Äußerlich überhaupt kein Unterschied feststellbar. Er wusste nur, daß das Gewicht des Pakets mit dem Bären ein wenig anders als das der anderen war, aber nicht, ob es mehr oder weniger wog. Und seine altgediente Balkenwaage, mit der man nur Gewichte vergleichen konnte, war kürzlich so zerbrechlich geworden, daß sie allerhöchstens noch drei Wägungen verkraften konnte.

Helfen Sie ihm !!!!

Zeigen Sie ihm, wie er mit drei Wägungen auf der Balkenwaage, wobei auf jeder Seite der Waage bei jeder Wägung nur einige der Pakete liegen dürfen, das Kuschelbärpaket herausfinden und sogar entscheiden kann, ob es leichter oder schwerer als die anderen Pakete ist.

**Für jede korrekte und als Comic eingereichte Lösung gibt es Bonuskreuze!!!**

genauer: Für eine Lösung, die in jedem Fall das abweichende Paket mit höchstens  $n$  Wägungen liefert, gibt es  $5 - n$  Bonuskreuze. Für eine Lösung mit 3 Wägungen, bei der auch noch festgestellt werden kann, ob das abweichende Paket leichter oder schwerer ist, gibt es 3 Bonuskreuze. Überlegen Sie sich genau, ob Sie eine Lösung mit maximal 12 Wägungen tatsächlich einreichen wollen!

**Wir wünschen Frohe Weihnachten und  
ein erfolgreiches Neues Jahr !**