Wintersemester 2016/2017

A. Hinrichs, M. Passenbrunner, F. Puchhammer, V. Sturm, A. Thalhammer

Übungen zur Vorlesung Mathematik 3 – 9. Serie

Ankreuzen vor der Übung am 11.01.2017

Aufgabe 33 **Dominierender linearer Anteil und direkte Ljapunov-Methode**

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= -x_1(t) + x_2(t)^2 \\ x_2'(t) &= -x_2(t)^3 - x_1(t)x_2(t). \end{aligned}$$

1. Welche Stabilitätsaussage können Sie für die Nulllösung mittels der Methode des dominierenden linearen Anteils treffen?
2. Untersuchen Sie das Stabilitäts- und Attraktivitätsverhalten der Nulllösung mittels der Ljapunov-Funktion $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$.

Aufgabe 34 **Dominierender linearer Anteil und Konstruktion einer Ljapunov-Funktion**

Wir betrachten das Differentialgleichungssystem $x'(t) = f(x(t))$ gegeben durch

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= ax_1(t) + bx_2(t) - x_1(t)^3 \\ x_2'(t) &= -bx_1(t) + ax_2(t) - x_2(t)^5. \end{aligned}$$

für $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Sei nun $a \neq 0$. Für welche Werte $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Nulllösung asymptotisch stabil bzw. instabil? *Hinweis: Verwenden Sie die Methode des dominierenden linearen Anteils.*
2. Sei nun $a = 0$ und $b = 1$. Als Kandidat für eine Ljapunov-Funktion verwenden wir

   $$V(x_1, x_2) = cx_1^2 + dx_2^2, \quad c, d \in \mathbb{R}.$$

   Berechnen Sie die orbitale Ableitung (Ableitung von V in Richtung f)? Geben Sie eine Wahl von c und d an, für die V eine Ljapunov-Funktion mit $\dot{V}(x) < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist?

Aufgabe 35 **Butcher-Tableau**

Gegeben sei das folgende Butcher-Tableau.

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 \\ \hline & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \end{array}$$

Schreiben Sie das dazugehörige Runge-Kutta Verfahren auf.

Aufgabe 36 **Explizite Einschrittverfahren - Vergleich**

Gegeben sei der folgende Mathematica-Code eines Runge-Kutta-Verfahrens für das Anfangswertproblem $x'(t) = t^2 + x(t)$, $x(0) = 1$. Der Rückgabewert gibt eine Näherung für $x(1)$ aus:

```
Clear[x, h]
h = 0.001; steps = 1000;  (*Schrittweite und Schrittzahl*)
f[t_, x_] := t^2 + x      (*Funktion für rechte Seite*)
{t0, x0} = {0, 1};        (*Anfangswerte*)
x[0] = x0;
Do[k1 = f[t0 + h k, x[k]];
   k2 = f[t0 + h (k + 1/2), x[k] + h k1/2];
   k3 = f[t0 + h (k + 1/2), x[k] + h k2/2];
   k4 = f[t0 + h (k + 1), x[k] + h k3];
   x[k + 1] = x[k] + h/6*(k1 + 2 k2 + 2 k3 + k4), {k, 0, steps - 1}]
x[steps]
```

Die exakte Lösung des Anfangswertproblem ist durch $x(t) = 3e^t - t^2 - 2t - 2$ gegeben.

1. Geben Sie zum obigen Runge-Kutta Verfahren das dazu gehörige Butcher-Tableau an.
2. Modifizieren Sie den Code, so dass das Eulerverfahren und das explizite Heunverfahren implementiert werden.
3. Vergleichen Sie die Fehler zur korrekten Lösung für die Schrittweiten 0.1, 0.01 und 0.001 für alle drei Verfahren.