

Übungen zur Vorlesung Mathematik 3 – 10. Serie

ANKREUZEN VOR DER ÜBUNG AM 18.1.2017

AUFGABE 37 2-stufige Einschrittverfahren, Teil ISei $c \in (0, 1]$ und betrachten Sie das Butcher-Tableau $B(c)$ gegeben durch

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ c & c & \\ \hline & 1 - 1/(2c) & 1/(2c) \end{array}$$

Wenden Sie das dadurch entstehende 2-stufige Runge-Kutta-Verfahren auf die Differentialgleichung

$$\dot{x} = \lambda x, \quad x(0) = 1 \quad (1)$$

für beliebiges $\lambda \in \mathbb{R}$ an und bestimmen Sie die Konsistenz- und Konvergenzordnung von $B(c)$ zu diesem AWP.**AUFGABE 38 2-stufige Einschrittverfahren, Teil II**Wie muss man den Parameter c wählen, sodass $B(c)$ aus dem vorigen Beispiel das explizite Heun-Verfahren erzeugt?Sei S der Stabilitätsbereich des Verfahrens in Aufgabe 37. Bestimmen Sie $\mathbb{R} \cap S$.**AUFGABE 39 Konsistenzordnung von Runge-Kutta-Verfahren**Man zeige: Wendet man ein s -stufiges (explizites) Runge-Kutta-Verfahren mit Schrittweite h auf das Anfangswertproblem (1) an, so gilt im ersten Iterationsschritt

$$hk_i = p_i(\lambda h), \quad i = 1, \dots, s.$$

mit Polynomen p_i höchstens vom Grad i . Folgern Sie daraus, dass die Konsistenzordnung dieses Verfahrens den Wert s nicht übersteigt.**AUFGABE 40 Implizite Runge-Kutta-Verfahren**

Wir betrachten das Radau-1A-Verfahren mit Butcher-Tableau

$$\begin{array}{c|ccc} 0 & 1/4 & -1/4 & \\ 2/3 & 1/4 & 5/12 & \\ \hline & 1/4 & 3/4 & \end{array}$$

und ein weiteres Mal das AWP (1).

Wir benutzen im folgenden die Notation aus Abschnitt II des Skriptums.

(i) Zeigen Sie durch Lösung eines linearen Gleichungssystem, dass in diesem Beispiel gilt

$$k_1 = \frac{2\lambda(3 - 2h\lambda)x_{k-1}}{6 - \lambda h(4 - \lambda h)}, \quad k_2 = \frac{6\lambda x_{k-1}}{6 - \lambda h(4 - \lambda h)},$$

also

$$\phi(t, x, h) = \frac{\lambda x(6 - \lambda h)}{6 - \lambda h(4 - \lambda h)}.$$

(ii) Benutzen Sie die Formel

$$\frac{1}{6 - s(4 - s)} = \frac{1}{6} + \frac{1}{9}s + \frac{5}{108}s^2 + O(s^3), \quad \text{für } s \text{ hinreichend klein,}$$

um zu zeigen, dass Konsistenzordnung 3 vorliegt.