Wintersemester 2016/2017
A. Hinrichs, A. Lindner

Übungen zur Vorlesung Analysis 1 für Lehramt – 10. Serie

Ankreuzen vor der Übung am 18.01.2017

Aufgabe 73 **Rechnen mit Exponentialfunktionen**

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen.

(a) $4^x \cdot 3^x = 36 \cdot 2^x$ (b) $9 \cdot 3^{x^2} = 729$ (c) $8^{x+4} \cdot 16^{x+3} = 32^{x+4} \cdot 4$

Aufgabe 74 **Rechnen mit Logarithmusfunktionen**

Bestimmen Sie die Lösungsmengen der folgenden Gleichungen.

(a) $7^{\log_7 x} = x$

(b) $\log_2 x = 2 \log_4 x$

(c) $\log_{10}(2x+4) - \log_{10}(x-2) = 1$

(d) $5^{\log_3(\log_{42} x)} = 1$

Aufgabe 75 **Formeln für den doppelten Winkel**

Zeigen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme die Identitäten

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x \qquad \text{und} \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x.$$

Berechnen Sie mit Hilfe dieser Formeln und bekannter Werte der trigonometrischen Funktionen $\sin 15°$.

Aufgabe 76 **Summen trigonometrischer Funktionen**

Zeigen Sie mit Hilfe der Additionstheoreme die Identitäten

$$\sin x + \sin y = 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \qquad \text{und} \qquad \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}.$$

Aufgabe 77 **Substitution $u = \tan \frac{x}{2}$**

Es sei $x \in \mathbb{R}$, $x \neq (2k+1)\pi$ für alle $k \in \mathbb{Z}$. Man zeige: Ist $u = \tan \frac{x}{2}$, so gilt

$$\sin x = \frac{2u}{1+u^2} \qquad \text{und} \qquad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}.$$

Aufgabe 78 **Hyperbelfunktionen**

Zeigen Sie die folgenden Identitäten für die Hyperbelfunktionen.

(a) $\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$

(b) $\cosh(x+y) = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$

(c) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$

AUFGABE 79 **Grenzwerte**

Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte.

(a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin ax}{\sin bx}$ für $b \neq 0$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$

AUFGABE 80 **Logarithmus und Divergenzgeschwindigkeit der harmonischen Reihe**

(a) Beweisen Sie für $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $\frac{1}{n+1} < \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}$

(b) Es sei $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \log n$. Zeigen Sie die Konvergenz dieser Folge.

HINWEIS: Sie können z.B. zeigen, dass (a_n) monoton und beschränkt ist oder dass (a_n) eine Cauchyfolge ist.