Wintersemester 2016/2017

A. Hinrichs, M. Passenbrunner, F. Puchhammer, V. Sturm, A. Thalhammer

Übungen zur Vorlesung Mathematik 3 – 11. Serie

Ankreuzen vor der Übung am 25.01.2017

Aufgabe 41 **Klassifizierung partieller Differentialgleichungen**

Gegeben seien folgende partielle Differentialgleichungen

(i)
$$x\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y)\right) + x^2\left(\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial u}{\partial y}(x,y)\right) = c_1, \qquad c_1 \in \mathbb{R}.$$

(ii)
$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) + c_2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t), \qquad a, c_2 \in \mathbb{R}.$$

(iii)
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + 2c_3\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 4u(x,y) - xy, \qquad c_3 \in \mathbb{R}.$$

Bestimmen Sie für diese Gleichungen die Koeffizienten a_0, a_i und $a_{ij}, i, j \in \{1,2\}$, sowie f in der Gleichung (17.1) im Skript. Ermitteln Sie weiters, wo diese Gleichungen elliptisch, hyperbolisch bzw. parabolisch sind.

Aufgabe 42 **Harmonische Funktionen I**

Gegeben sei die Funktion $u(x,y,z) := \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$. Zeigen Sie, dass für $(x,y,z) \neq (0,0,0)$
$$\Delta u = \frac{\partial^2}{\partial x^2}u + \frac{\partial^2}{\partial y^2}u + \frac{\partial^2}{\partial z^2}u = 0.$$

Aufgabe 43 **Harmonische Funktionen II**

Wir betrachten den zwei-dimensionalen Laplaceoperator $\Delta f(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$.

(i) Wir definieren x, y in Polarkoordinaten, d.h. $x(r,\phi) = r\sin\phi$, $y(r,\phi) = r\cos\phi$, sowie $v(r,\phi) = u(x(r,\phi), y(r,\phi))$. Zeigen Sie, dass der Laplaceoperator in Polarkoordinaten folgende Form annimmt
$$\Delta u(x,y) = \frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r,\phi) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2}(r,\phi) + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}(r,\phi).$$
(*Hinweis:* Berechnen Sie die rechte Seite mit Hilfe der mehrdimensionalen Kettenregel[1].)

(ii) Verwenden Sie (i) um zu zeigen, dass die Funktion $u(x,y) = \frac{y}{x^2+y^2}$ im Kreisring $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$ harmonisch ist.

Aufgabe 44 **Prinzipiensache**

Es sei $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 4\}$. Weiters sei ein gleichmäßig elliptischer Differentialoperator L wie in Gleichung (17.1) im Skript gegeben mit $a_0 \equiv 0$ und in $\overline{\Omega}$ stetigen Koeffizienten a_{ij}, a_i. Warum kann die Funktion
$$u(x,y) = -(x-1)^4 - (y-1)^4$$
keine Lösung der Differentialgleichung
$$Lu = c^2, \qquad c \in \mathbb{R}$$
sein?

---

[1] Im Fall der Fälle beispielsweise nachzulesen auf Wikipedia oder MathWorld.