

Übungen zur Vorlesung Analysis 2 für Lehramt – 3. Serie

ANKREUZEN VOR DER ÜBUNG AM 29.03.2017

AUFGABE 13 Potenzreihe

Wir betrachten die Potenzreihe $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots$.

- Bestimmen Sie den Konvergenzradius R dieser Potenzreihe.
- Ist die Potenzreihe für $x = \pm R$ konvergent?
- Bestimmen Sie eine Potenzreihe, deren Ableitung diese Potenzreihe ist. Welche Reihe erhalten Sie?
- Bestimmen Sie die Funktion $f(x)$ explizit.

AUFGABE 14 Konvergenzradius von Potenzreihen

Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihen

$$(a) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x}{42}\right)^k \qquad (b) \sum_{k=0}^{\infty} (k^2 + 5^k)x^k$$

AUFGABE 15 Potenzreihendarstellung durch Koeffizientenvergleich

Gegeben sei die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1-x}{x^2+2}$. Ermitteln Sie durch den Ansatz

$$1 - x = (x^2 + 2) \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

eine Potenzreihe für f . Welchen Konvergenzradius hat die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$?

AUFGABE 16 Produkt von Potenzreihen

Benutzen Sie die Potenzreihen für Sinus- und Cosinus-Funktion und den Produktsatz für Potenzreihen, um die Identität $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ für beliebige $x \in \mathbb{R}$ zu zeigen.

HINWEIS: Wiederholen Sie, was Sie über Binomialkoeffizienten wissen. Insbesondere die Symmetrie der Binomialkoeffizienten und die Formel

$$\sum_{m=0}^n \binom{n}{m} = 2^n$$

könnten hilfreich sein.