

Endklausur zur
Mathematische Statistik I

Werner G. Müller

**Institut für Angewandte Statistik (IFAS)
Johannes-Kepler-Universität Linz**

Sommersemester 2006

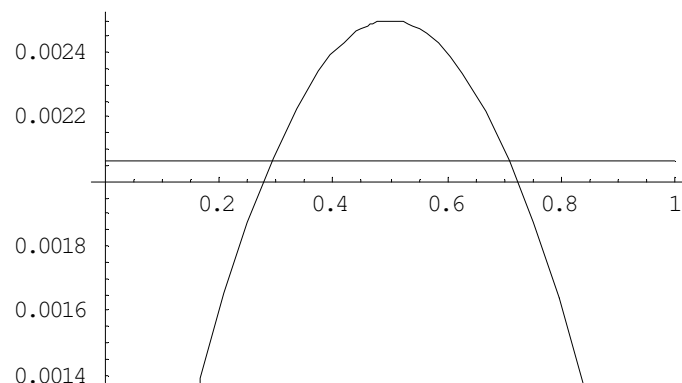
Die Klausur ist „open book“, d.h. das Referenzbuch „Statistical Inference“, 2nd edition ist als Prüfungsunterlage zugelassen.

Prüfungsdauer ist zwei Stunden.

25.10.2006

1. Es seien X_1, \dots, X_n eine Stichprobe aus einer $N(0, \sigma_X^2)$ normalverteilten Grundgesamtheit und Y_1, \dots, Y_m eine Stichprobe aus einer $N(0, \sigma_Y^2)$ normalverteilten Grundgesamtheit, unabhängig von den X en. Definiere $\lambda = \sigma_Y^2 / \sigma_X^2$. Bestimmen Sie den Likelihoodverhältnistest zum Niveau α für die Hypothesen $H_0: \lambda = \lambda_0$ gegen $H_A: \lambda \neq \lambda_0$.
2. Es haben die Zufallsvariablen X Dichte $f(x)$ und Y , unabhängig von X , Dichte $f(y)$. Schreiben Sie die Dichte für $Z = X/\sqrt{Y}$ als Integral.
3. Interpretieren Sie den folgenden Mathematica-code/output:

```
n=100
100
Plot[{p (1 - p) / n, n / (4 (n + sqrt(n))^2)}, {p, 0, 1}]
```



-Graphics-

4. Es seien X_1, \dots, X_n i.i.d. normalverteilt $N(\theta, 1)$.
- Zeigen Sie, dass $\bar{X}^2 - (1/n)$ der beste unverzerrte Schätzer für θ^2 ist.
 - Berechnen Sie die Varianz dieses Schätzers und zeigen sie, dass sie die Cramér-Rao Grenze überschreitet.
5. Erklären Sie in eigenen Worten die Rolle dieses Herrn bei der Entwicklung der mathematischen Statistik.



6. Nach welchem (gebräuchlichen) Gütekriterium ist als Schätzer für die Varianz einer normalverteilten Grundgesamtheit $\tilde{s}^2 = \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$ zu verwenden? Begründen Sie auch, warum in diesem Fall dieses Gütekriterium nicht gut geeignet ist.
7. (Übungsaufgabe 8.19) Die Zufallsvariable X habe Dichte $f(x) = e^{-x}$, $x > 0$. Man erhält eine Beobachtung der Zufallsvariable $Y = X^\theta$ auf deren Basis die Hypothesen $H_0: \theta = 1$ gegen $H_A: \theta = 2$ getestet werden sollen. Geben Sie zwei Gleichungen an, deren Lösungen den gleichmäßig trennschärfsten Test zum Niveau α bestimmen.
8. Berechnen Sie (ungefähr) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der neuntgrößte Wert einer Zufallsstichprobe der Größe $n = 10$ aus einer Studentverteilung größer als 2 ist.