

Probeklausur zur
Mathematische Statistik I

Werner G. Müller

**Institut für Angewandte Statistik (IFAS)
Johannes-Kepler-Universität Linz**

Sommersemester 2006

Die Klausur ist „open book“, d.h. das Referenzbuch „Statistical Inference“, 2nd edition ist als Prüfungsunterlage zugelassen.

Prüfungsdauer ist zwei Stunden.

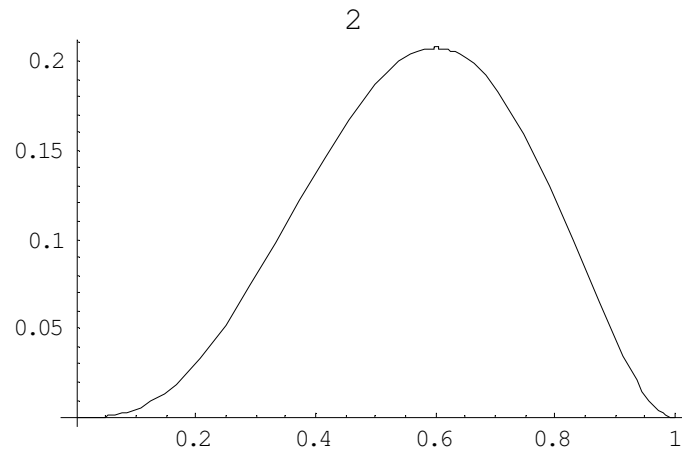
19.7.2006

1. Warum verwendet man zur Schätzung der Varianz einer Grundgesamtheit anstelle der Stichprobenvarianz üblicherweise den Schätzer $s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$? Begründen Sie ausführlich.
2. (Übungsaufgabe 7.44) Es seien X_1, \dots, X_n i.i.d. normalverteilt $N(\theta, 1)$.
 - (a) Zeigen Sie (unter Verwendung von Theorem 7.3.23), dass $\bar{X}^2 - (1/n)$ der beste unverzerrte Schätzer für θ^2 ist.
 - (b) Berechnen Sie die Varianz dieses Schätzers (unter mehrmaliger Zuhilfenahme vom Stein'schen Verschiebungssatzes aus Sektion 3.6) und zeigen sie, dass sie die Cramér-Rao Grenze überschreitet.
3. Erklären Sie in eigenen Worten die Bedeutung des Neyman-Pearson Lemmas für die mathematische Statistik.
4. Es seien X_1 und X_2 gleichverteilte Zufallsvariable auf $(\theta, \theta+1)$. Um zu testen, ob $H_0: \theta=0$ gegen $H_1: \theta>0$ gebe es zwei Tests:
 - $\phi_1(X_1)$: lehne H_0 ab wenn $X_1 > 0.95$, und
 - $\phi_2(X_1, X_2)$: lehne H_0 ab wenn $X_1 + X_2 > C$.Finden Sie jenen Wert für C für den die Tests das gleiche exakte Niveau besitzen.
5. Haben die Zufallsvariablen X Dichte $f(x)$ und Y , unabhängig von X , Dichte $f(y)$ schreiben Sie die Dichte für $Z=X^2-Y^2$ als Integral.

6. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der drittgrößte Wert einer Zufallsstichprobe der Größe $n=10$ aus einer Standardnormalverteilung größer als Null ist.
7. Interpretieren Sie den folgenden Mathematica-code/output:

x = 2

Plot[(x + 2) (x + 1) p³ (1 - p)^x / 2, {p, 0, 1}]



-Graphics-

$$\int_0^1 (\mathbf{x} + 2) (\mathbf{x} + 1) \mathbf{p}^3 (1 - \mathbf{p})^{\mathbf{x}} / 2 \, \mathbf{d}\mathbf{p}$$

$$\frac{1}{10}$$

8. Es seien X_1, \dots, X_n i.i.d. normalverteilte Zufallsvariable $N(\mu, \sigma^2)$. Mit unbekanntem μ und σ^2 . Zeigen Sie, dass die Summe und Quadratsumme der Beobachtungen zusammen eine minimal suffiziente Statistik für die Parameter sind.