Probeklausur zur

Mathematische Statistik I

Werner G. Müller

Institut für Angewandte Statistik (IFAS)
Johannes-Kepler-Universität Linz

Sommersemester 2006

Die Klausur ist „open book", d.h. das Referenzbuch „Statistical Inference", 2nd edition ist als Prüfungsunterlage zugelassen.

Prüfungsdauer ist zwei Stunden.

18.7.2006

1. Warum verwendet man zur Schätzung der Varianz einer Grundgesamtheit anstelle der Stichprobenvarianz üblicherweise den Schätzer $s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{x}\right)^2$? Begründen Sie ausführlich.

2. (Übungsaufgabe 7.44) Es seien $X_1,\ldots,X_n$ i.i.d. normalverteilt N$(\theta,1)$.
   (a) Zeigen Sie (unter Verwendung von Theorem 7.3.23), dass $\bar{X}^2 - (1/n)$ der beste unverzerrte Schätzer für θ^2 ist.
   (b) Berechnen Sie die Varianz dieses Schätzers (unter mehrmaliger Zuhilfenahme vom Stein'schen Verschiebungssatzes aus Sektion 3.6) und zeigen sie, dass sie die Cramér-Rao Grenze überschreitet.

3. Erklären Sie in eigenen Worten die Bedeutung des Neyman-Pearson Lemmas für die mathematische Statistik.

4. Es seien X_1 und X_2 gleichverteilte Zufallsvariable auf $(\theta,\theta+1)$. Um zu testen, ob H_0: $\theta=0$ gegen H_1: $\theta>0$ gebe es zwei Tests:
   - $\phi_1(X_1)$: lehne H_0 ab wenn $X_1 > 0.95$, und
   - $\phi_2(X_1, X_2)$: lehne H_0 ab wenn $X_1 + X_2 > C$.

   Finden Sie jenen Wert für C für den die Tests das gleiche exakte Niveau besitzen.

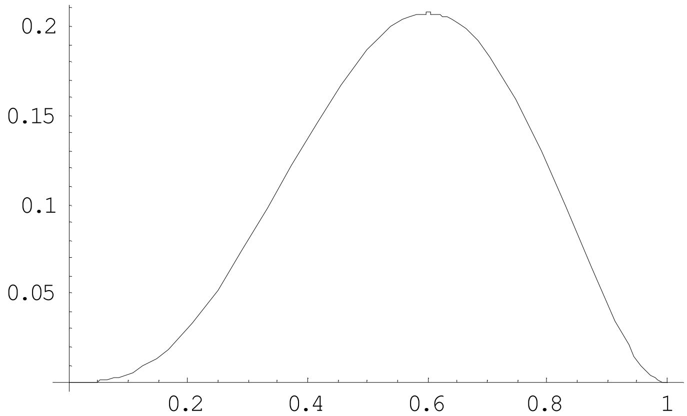
5. Haben die Zufallsvariablen X Dichte $f(x)$ und Y, unabhängig von X, Dichte $f(y)$ schreiben Sie die Dichte für $Z=X^2-Y^2$ als Integral.

6. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der drittgrößte Wert einer Zufallsstichprobe der Größe $n=10$ aus einer Standardnormalverteilung größer als Null ist.

7. Interpretieren Sie den folgenden Mathematica-code/output:

```
x = 2
Plot[(x + 2) (x + 1) p^3 (1 - p)^x / 2, {p, 0, 1}]
```

2



-Graphics-

$$\int_0^1 (x+2)\,(x+1)\,p^3\,(1-p)^x/2\,dp$$

$$\frac{1}{10}$$

8. Es seien $X_1,\ldots X_n$ gleichverteilte Zufallsvariable auf $(\theta,\theta+1)$. Zeigen Sie, dass die Spannweite $X_{(1)}$ - $X_{(n)}$ und der midrange ($X_{(1)}$ - $X_{(n)}$)/2 minimal suffiziente Statistiken für θ sind.