Wiederholungsklausur zur

Mathematische Statistik II

Werner G. Müller, Institut für Angewandte Statistik (IFAS), JKU Linz

Wintersemester 2009/10

Die Klausur ist „open book“, d.h. das Referenzbuch „Statistical Inference“, 2nd edition ist als Prüfungsunterlage zugelassen. Prüfungsdauer ist zwei Stunden.

20.10.2010

1. Es sei $X_1,\dots,X_n$ eine Zufallsstichprobe aus einer $N(\mu,\sigma^2)$ normalverteilten Grundgesamtheit, mit bekanntem μ und unbekanntem σ^2. Finden Sie eine Scorestatistik zum Testen von H_0: $\sigma=\sigma_0$.

2. Zeigen Sie, dass die asymptotische relative Effizienz des Medians M_n gegenüber dem Stichprobenmittelwert $\bar{x}$ von Skalenänderungen unberührt bleibt. Das heißt, es ist unerheblich, ob die zugrunde liegende Dichte $f(x)$ oder $(1/\sigma)f(x/\sigma)$ ist.

3. Beschreiben Sie den Unterschied bei der Interpretation von Konfidenz- und HPD-(Glaubwürdigkeits-)Intervallen.

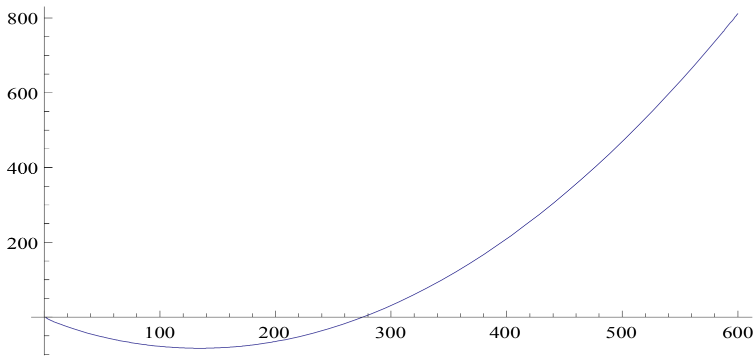
4. Es seien X_1, X_2, ... i.i.d. Beobachtungen aus einer Gleichverteilung auf (0,1). Zeigen Sie, dass die Folge der geometrischen Mittel $\left(\prod_{i=1}^{n} X_i\right)^{\frac{1}{n}}$ fast sicher gegen $e^{-1} \approx 0.368$ konvergiert. Hinweis: bestimmen Sie zunächst die Verteilung der -log(X_i) !

5. Was illustriert der folgende Mathematica-code/output?

```
k = 1 / 4;

f[n_] = n * (n - 1) / (4 * (1 / k) ^2 * (Quantile[StudentTDistribution[n - 1], 0.975]) ^2) -
   Quantile[ChiSquareDistribution[n - 1], 0.9];

Plot[f[n], {n, 1, 600}]
FindRoot[f[n] == 0, {n, 10, 1001}]
```




```
{n → 275.525}
```

6. Es seien X_1, X_2 i.i.d. gleichverteilte Zufallsvariablen aus $(\theta - 1/2, \theta + 1/2)$.
   a. Zeigen Sie, dass $(\min(X_1, X_2), \max(X_1, X_2))$ ein 50% Konfidenzintervall für θ darstellt.
   b. Angenommen Sie beobachten $X_1=84.03$ und $X_2=84.04$. Wie „zufrieden“ sind sie mit dem obigen 50% Konfidenzintervall? Ändert sich Ihre „Zufriedenheit (confidence)“, wenn Sie stattdessen $X_1=64.02$ und $X_2=65.02$ beobachten? Argumentieren Sie ausführlich.

7. Zeigen Sie: Falls M_n eine konsistente Schätzfolge für den Parameter μ ist und K_n eine konsistente Schätzfolge für κ, dann ist
   (a) M_n+K_n konsistent für $\mu+\kappa$ und
   (b) $M_n \cdot K_n$ konsistent für $\mu \cdot \kappa$.

8. Erklären Sie die Relevanz der nach diesem Herrn benannten Ungleichung für das statistische Testen.