Johannes Kepler Universität Linz
Institut für Theoretische Physik

Übung zu Theoretischer Physik II für LA (Quantenmechanik und Thermodynamik) SS2005

2.Übungstermin: 5.4.2005

3.) Hohlraumstrahlung:
Die Energiedichte $u(T,\nu)$ der Hohlraumstrahlung setzt sich aus der Zustandsdichte $z(\nu)$ und der "mittleren Freqeunz" $\bar{\nu}$ (aus der VL bekannt) zusammen.

a.) Zuerst sollen Sie den Ausdruck für $z(\nu)$ (nochmals) herleiten und zwar folgendermaßen:
Der Hohlraumstrahler sei ein Würfel mit Kantenlänge L mit perfekt reklektierenden Wänden, sodass die Tangentialkomponenten des elektrischen Feldes an jeder Würfelseite verschwinden müssen. Was ergibt sich daher für die möglichen Wellenzahlen k_x, k_y, k_z?(vergleiche: eingespannte Saite)
Welches Volumen im k-Raum nimmt nun eine mögliche Mode (k_x, k_y, k_z) ein? Ermitteln Sie daraus die "Dichte" $\hat{z}(k)$ der Zustände im k-Raum.
Mittels der Beziehung $\hat{z}(k)dk = z(\nu)d\nu$ erhalten sie $z(\nu)$

b.) Bestimmung der "mittleren Kreisfreqeunz" $\bar{\nu}$: In der Vorlesung haben sie unter der Annahme (Rayleigh-Jeans), dass die Energie kontinuierlich von 0 bis ∞ ihre Werte annimmt, den Mittelwert mittels

$$\frac{\int_0^\infty d\nu E h\nu e^{-\frac{\nu}{k_B T}}}{\int_0^\infty d\nu e^{-\frac{\nu}{k_B T}}} = k_B T$$

Verwenden Sie nun den Ansatz, dass die Energien nur die diskreten Werte $E_n = nh\nu_0$ annehmen kann. Damit gibt es auch ein diskretes Frequenzspektrum $\nu_n = n\nu_0$ Werten Sie dann

$$\frac{\sum_{n=0}^\infty E_n e^{-\beta E_n}}{\sum_{n=0}^\infty e^{-\beta E_n}}$$

aus.

c.) Werten Sie nun das Integral $\int_0^\infty d\nu u(T,\nu)$ konkret aus (Plancksches Gesetz).

4.) Spezifische Wärme eines Festkörpers(nach Einstein):
Auf analoge Weise wie für die Wärmestrahlung läßt sich für einen Festkörper (N Teilchen im Gitter $L \cdot L \cdot L$) die Energiedichte ermitteln, wobei es zur konkreten Auswertung einiger Vereinfachungen bedarf. Im Unterschied zur Wärmestrahlung bekommt man zu $\bar{\omega}$ noch ein $\frac{1}{2}\hbar\omega$ auf Grund der Grundzustandenergie (quantenmechanisch). Zusätzlich gibt es pro Atom 3 Freiheitsgrade, damit 3 Polarisationsrichtungen der Phononen. Es muß damit immer gelten $\int_0^\infty g(\omega)d\omega = 3N$.

a.) In der Einsteinsche Näherung wird angenommen, dass es nur eine Frequenz gibt, mit der alle Atome schwingen d.h. $g(\omega) = C_E\delta(\omega - \tilde{\omega})$. Bestimmen Sie die Konstante C_E und ermitteln Sie daraus die (innere) Energie U(T) des Festkörpers (bzw. der Phononen).

b.) In der Debyeschen Näherung (gültig für tiefe Temperaturen) wird angenommen, dass es nur Frequenzen unterhalb einer "Cut-Off"-Frequenz gibt und $g(\omega) = C_D\theta(\omega_D - \omega)\omega^2$. Zur Ermittelung von C_D gehen Sie einen analogen Weg wie bei der Wärmestrahlung. Aus der Bedingung $\int_0^\infty g(\omega)d\omega = 3N$ erhalten Sie die "Cut-Off"-Frequenz ω_D. Ermitteln Sie die die (innere) Energie U(T) des Festkörpers (bzw. der Phononen) unterAusnutzung des Limes $T \to 0$.

Ermitteln Sie für diese beiden Näherungen auch die spezifische Wärme d.h. $C_V = \frac{\partial}{\partial T}U(T)$.