Mathematik I
WS 2014/15
2.Übungsblatt
Aufgaben für den 23.10.2014

1. **Relationen**

   Gegeben sei die Menge $M = \{1, 2, 3\}$. Zeigen Sie, dass die Relation
   $$R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (1,3), (2,3)\}$$
   eine Ordnungsrelation $R_{\leq}$ ist.

2. **Injektiv, surjektiv, bijektiv**

   Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 2x^2 - 1$.

   a) Ist f injektiv, surjektiv, bijektiv?

   b) Bestimmen Sie die größtmöglichen Mengen A und B, sodass $f : A \to B$ injektiv ist.

   c) Bestimmen Sie die größtmöglichen Mengen A und B, sodass $f : A \to B$ surjektiv ist.

   d) Bestimmen Sie die größtmöglichen Mengen A und B, sodass $f : A \to B$ bijektiv ist.

   Argumentieren Sie anhand einer Skizze.

3. **Hintereinanderschaltung von Funktionen**

   Gegeben seien die Funktionen
   $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } f(x) = 2x - 4,$$
   $$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ mit } g(x) = x^3.$$

   a) Bestimmen Sie $f \circ g$ und $g \circ f$ und zeichnen Sie die dazugehörigen Funktionsgraphen.

   b) Bestimmen Sie die Umkehrabbildungen f^{-1}, g^{-1}, $(g \circ f)^{-1}$, $f^{-1} \circ g^{-1}$ und überprüfen Sie die Formel
   $$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}.$$

4. **Summen- und Produktzeichen**

   Schreiben Sie folgende Ausdrücke mit Hilfe eines Summen- bzw. Produktzeichens.

   a) $1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + 21$

   b) $\frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \cdots \cdot 100}$

   c) $a_2 + a_4 + a_6 + \cdots + a_{40}$

   d) $(1 \cdot 2) + (2 \cdot 3) + (3 \cdot 4) + \cdots + ((n-1) \cdot n)$

   e) $3^2 + 4^3 + \cdots + 10^9$

   f) $\frac{50!}{10!}$

g) $11 \cdot 12 \cdot \dots \cdot 120$.

5. Prüfen Sie die folgende Beziehung: Sind $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$, so gilt

$$\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{n} a_j a_{j-i} = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{j} a_i a_j.$$

Hinweis: Sie können annehmen, dass $a_i = 0$ für $i \notin \mathbb{N}_0$.

6. **Vollständige Induktion**

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion für alle $n \in \mathbb{N}$:

a)

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

b)

$$\sum_{i=1}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1.$$