

Mathematik I
WS 2014/15
7.Übungsblatt
Aufgaben für den 27.11.2014

1. Winkelgeschwindigkeit

Die Drehachse eines im Punkt $P = (2|1|2)cm$ befindlichen Massepunkts verläuft entlang der Geraden

$$g := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Der Körper rotiert um diese Achse mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit

$$|\vec{\omega}| = \omega = 10\sqrt{3}s^{-1}.$$

Bestimmen Sie den Betrag der Bahngeschwindigkeit \vec{v} des Massepunktes P .

2. Spiegelbild eines Punktes

Berechnen Sie das Spiegelbild P' des Punktes $P = (7|0|1)$ bezüglich der Ebene

$$E := \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - y + 2z = -5 \}$$

und den Abstand von P und P' , wobei $\vec{x} := (x|y|z)$.

3. Geraden und Ebenen

(a) Berechnen Sie eine Parameterdarstellung der Schnittgeraden g der Ebenen

$$E_1 := \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - 2y + z = 0 \}$$

und

$$E_2 := \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 4x + 5y - 2z - 3 = 0 \}$$

und den zugehörigen Schnittwinkel φ , wobei $\vec{x} := (x|y|z)$.

(b) Bestimmen Sie den kürzesten Abstand des Punktes $P = (1|2|-1)$ von der Schnittgeraden g .

(c) Bestimmen Sie den kürzesten Abstand der Geraden

$$h := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

von der Schnittgerade g .

4. Optik

Eine Ebene E sei gegeben durch die Koordinatenform $x + 2y + 2z = 12$. Ein Lichtstrahl, der entlang der Geraden

$$g := \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 11 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

auf eine Ebene zuläuft, wird an der Ebene reflektiert. In welchem Punkt P trifft der Lichtstrahl auf die Ebene und unter welchem Winkel φ (zwischen Lichtstrahl und Ebene) fällt er ein? Auf welcher Geraden g' verläuft der reflektierte Strahl?

5. Komplexe Zahlen

Berechnen Sie den Real- und Imaginärteil sowie den Betrag und das Argument der folgenden komplexen Zahlen z_j für $j = 1, \dots, 3$ mit

- (a) $z_1 := (2 - 3i)^2$,
- (b) $z_2 := \frac{3+2i}{(1+i)^2}$ und
- (c) $z_3 := \frac{(4-8i)^2}{2+2i}$.

Bestimmen Sie zusätzlich von z_1 die komplexen Zahlen $-z_1$, \bar{z}_1 und $\frac{1}{z_1}$ und veranschaulichen Sie alle Ergebnisse in der komplexen Zahlenebene.

Hinweis: Das Argument φ ist der Winkel zwischen der komplexen Zahl und der reellen Achse in der komplexen Zahlenebene.