Mathematik I
WS 2014/15
3. Mathematicaprojekt
Abgabe bis 02.02.2015

Die folgenden Aufgaben sind in Gruppen zu je vier Personen mit Mathematica zu lösen und bis 02.02.2015 an die Adresse *mathmechtutorium@algebra.uni-linz.ac.at* zu senden.

1. **Kehrwert einer positiven Zahl**

   Der Computer soll, ohne zu dividieren, den Kehrwert einer positiven Zahl p berechnen. Schreiben Sie ein Modul oder eine Funktion *Kehrwert*[p,a1,n], die die ersten n Glieder der rekursiven Folge $a_{n+1} := a_n(2 - pa_n)$ mit $0 < a_1 < 1/p$ berechnet. Testen Sie das Modul oder die Funktion mit $p = 3$ und $a_1 = 1/10$. Finden Sie das kleinste $n_0 \in \mathbb{N}$, damit der Kehrwert auf zwei Nachkommastellen exakt berechnet wird. Ist n_0 vom Anfangswert a_1 abhängig?

2. **Konvergenz von Reihen**

   Berechnen Sie die ersten 30 Glieder der Reihen

$$
\begin{aligned}
a_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \\
b_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k!} \\
c_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k+1}{k^3} \\
d_n &= \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{k+1}{2^k} \\
e_n &= \sum_{k=1}^{n} \begin{cases} \frac{k+1}{2^k}, & k \text{ ungerade} \\ 1 - \frac{k+1}{2^k}, & k \text{ gerade} \end{cases}
\end{aligned}
$$

   und stellen Sie diese graphisch dar. Berechnen Sie, falls existent die Grenzwerte der Reihen.

3. **Konvergenzgeschwindigkeit**

   Berechnen Sie, falls existent, die Grenzwerte der Reihe

$$a_n := \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$$

   und der Folge

$$b_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

   für $n \to \infty$. Finden Sie jeweils das kleinste $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass sich a_n bzw. b_n in der zweiten und vierten Nachkommastelle nicht mehr ändern. Welche Folge konvergiert schneller?

4. **Turmbau**

   Wir bauen einen Turm aus kreisrunden Platten nach folgenden Vorschriften: Jede Platte besitze den halben Durchmesser der vorhergehenden und die zweite Platte sei halb so dick wie die erste, die dritte ein Drittel so dick wie die zweite, etc. Schreiben Sie ein Modul oder eine Funktion *Turm*[d,h,n], die die Gesamthöhe H_n und das Gesamtvolumen V_n eines Turms aus n Platten berechnet, wobei d der Durchmesser und h die Dicke der ersten Platte in [cm] sind. Testen Sie das Modul oder die Funktion mit $d = 10\text{cm}$ und $h = 4\text{cm}$ für $n = 1, ..., 20$. Berechnen Sie damit die Höhe H und das Volumen V eines Turms aus unendlich vielen Platten.

5. **Reihen und Funktionen**

   Berechnen Sie den Grenzwert $a(x)$ der Reihe

   $$a_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

   für $x \in \mathbb{R}$. Plotten Sie die ersten n Reihenglieder für $x \in [0, 2\pi]$ und $n = 0, 1, ..., 10$. Finden Sie jeweils das kleinste $n_0 \in \mathbb{N}$ für $x = \pi$ und $x = 2\pi$, sodass

   $$|a_{n_0}(x) - a(x)| \leq \varepsilon$$

   für $\varepsilon = 10^{-k}$ mit $k = 1, 2, 3$.

6. **Bisektionsverfahren**

   Erstellen Sie ein Modul *Bisektion*[f,a,b,n], das mit Hilfe des Bisektionsverfahrens eine numerische Approximation einer Nullstelle einer gegebenen stetigen Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ in einem vorgegebenen Intervall $[a, b]$ mit $a < b$ und $a, b \in \mathbb{R}$ berechnet, wobei $n \in \mathbb{N}$ die maximale Anzahl der Iterationsschritte ist. Finden Sie damit die Nullstelle der Funktion $f(x) = x - e^{-x}$. Wo nimmt die Funktion $f(x) = x - \ln x$ den Wert 2 an?

   Bonus: Überlegen Sie sich ein vernünftiges Abbruchkriterium für Ihren Algorithmus und testen Sie dieses anhand der obigen Beispiele.

Hinweis zum Bisektionsverfahren:

Der Zwischenwertsatz sagt uns, dass jede auf einem abgeschlossenen Intervall definierte stetige Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft $f(a)f(b) < 0$ in $]a, b[$ mindestens eine Nullstelle besitzt. Der Beweis des Zwischenwertsatzes liefert uns ein konstruktives Verfahren - das sogenannte Bisektionsverfahren - zum Aufsuchen von Nullstellen stetiger Funktionen:

Ohne Beschränkung der Allgemeinheit nehmen wir an, dass $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ sind. Wir halbieren das Intervall $[a, b]$ in der Mitte, also beim Punkt

$$m := \frac{a+b}{2}.$$

Ist $f(m) = 0$, so ist bereits eine Nullstelle gefunden und wir brechen das Verfahren ab. Ist $f(m) > 0$, so bezeichnen wir das Intervall $[a, m]$ mit $[a_1, b_1]$. Ist hingegen $f(m) < 0$, so bezeichnen wir das Intervall $[m, b]$ mit $[a_1, b_1]$. Nun halbieren wir das Intervall $[a_1, b_1]$, etc. Falls wir dieses Verfahren ∞ oft durchführen müssen (also nach endlich vielen Iterationsschritten keine Nullstelle finden), dann ist die Nullstelle $x_0 \in [a, b]$ mit $f(x_0) = 0$ gegeben durch

$$x_0 = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} [a_k, b_k].$$

Brechen wir aber den Algorithmus nach dem $n-$ten Iterationsschritt ab, so setzen wir

$$x_0 = \frac{a_n + b_n}{2}$$

als numerische Approximation der Nullstelle.