Mathematik I
WS 2014/15
12.Übungsblatt
Aufgaben für den 22.01.2015

1. **Grenzwerte von Reihen**

   Berechnen Sie, falls existent, die Grenzwerte folgender Reihen für $n \to \infty$:

   a) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{3^{2k}-5}{14^k}$

   b) $\sum\limits_{k=1}^{n} \left(\sqrt{1+k} - \sqrt{k}\right)$

   c) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k(k-1)}{k!}$

   d) $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{k^2-1}{k!}$

2. **Partialbruchzerlegung**

   Zeigen Sie die Konvergenz der folgenden Reihen für $n \to \infty$ und berechnen Sie die Grenzwerte mittels Partialbruchzerlegung:

   a) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$

   b) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

3. **Konvergenz und absolute Konvergenz von Reihen**

   Überprüfen Sie die Konvergenz und die absolute Konvergenz der folgenden Reihen:

   a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}\sqrt[k]{k}}{k}$

   b) $\sum\limits_{k=2}^{\infty} \frac{k}{(\ln k)^k}$

   c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k}$

4. **Wurzel- vs. Quotientenkriterium**

   Zeigen Sie die Konvergenz von

   $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^k}{2^{k-1}}$$

   mit Hilfe des Wurzelkriteriums. Welches Resultat erhalten Sie bei Anwendung des Quotientenkriteriums?

5. **Absolute Konvergenz von Reihen**

   Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ absolut konvergent ist, falls $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2$ und $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k^2$ konvergieren.

   Hinweis: Verwenden Sie die Ungleichung $(a \pm b)^2 \geq 0$ für $a, b \in \mathbb{R}$.

6. **Reihen in der Technik**

   Ein Balken der Länge L wird im Mittelpunkt zum Zeitpunkt $t_0 = 0$ von einem Gewicht G befreit. Die Auslenkung $y(t)$ des Mittelpunktes zur Zeit t wird durch

   $$y(t) = C_1(G, L)\left[\cos r + \frac{\cos(9r)}{3^4} + \frac{\cos(25r)}{5^4} + \cdots\right]$$

   für $t \geq 0$ beschrieben, wobei

   $$r := C_2(G, L)t$$

   und C_1, C_2 (vom Gewicht G und der Länge L abhängige) positive Konstanten sind. Zeigen Sie die Konvergenz dieser Reihe.