Mathematik I
WS 2014/15
13.Übungsblatt
Aufgaben für den 29.01.2015

1. **Reihen**

   Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{(1+k)k}$ für $0 \leq x \leq 1$ konvergiert und für $x > 1$ divergiert. Berechnen Sie den Grenzwert für $x = 0$ und $x = 1$.

2. **Wurfparabel**

   Die Wurfparabel ohne Luftwiderstand sei gegeben durch $y(t) = vt - \frac{g}{2}t^2$ für $t \geq 0$, wobei y den Ort, v die Anfangs- bzw. Endgeschwindigkeit und g die Fallbeschleunigung auf der Erde sind.

   (a) Wie lange ist die Zeitdauer T eines Wurfes? Berechnen Sie die Maximalhöhe H des Wurfes.

   (b) Ein Gummiball fällt im freien Fall von einer Höhe h auf den Boden. Verwenden Sie für den freien Fall die bekannten Beziehungen $v(t) = gt$ und $y(t) = \frac{g}{2}t^2$ und berechnen Sie damit die Aufschlaggeschwindigkeit v_0 sowie die Fallzeit T_0.

   (c) Bei jedem Aufschlag des Gummiballs auf dem Boden wird der Ball mit 2/3 seiner Aufschlaggeschwindigkeit reflektiert. Welche Höhe H_n erreicht der Ball bei n-ten Sprung für $n \in \mathbb{N}$? Wie lange ist die Zeitdauer T_n vom n-ten Sprung für $n \in \mathbb{N}$?

   (d) Wie lange springt der Gummiball insgesamt? Welchen Weg legt der Gummiball insgesamt zurück?

   (e) Welche Ergebnisse würden auf dem Mond auftreten?

3. **Reelle Funktionen in der Physik**

   (a) Die Länge l eines Stabes in cm ist durch die Funktion

   $$l(T) = l_0(1 + \alpha T)$$

   von seiner Temperatur T in °C abhängig, wobei l_0 die Länge bei 0°C und α der Wärmeausdehnungskoeffizient sind. Bei 15°C ist der Stab 17cm lang, bei 60°C 17.2cm. Berechnen Sie den Wärmeausdehnungskoeffizienten des Materials. Wie lange ist der Stab bei 0°C?

   (b) In Amerika ist es üblich, die Temperatur in Fahrenheit °F zu messen. Zwischen Fahrenheit- und Celsius-Skalen herrscht ein linearer Zusammenhang. Der Gefrierpunkt von Wasser ist bei 0°C bzw. 32°F und der Siedepunkt bei 100°C oder 212°F. Geben Sie die Umrechnungsfunktionen explizit an. Gibt es eine Temperatur, die auf beiden Skalen denselben Wert hat?

   (c) Geben Sie eine Formel für die Länge l des Stabes aus (a) an, wobei die Temperatur in °F gemessen wird.

4. **Monotonie von Funktionen**

   (a) Seien f und g zwei monoton steigende Funktionen

   $$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

   Sind $f \circ g$ und $f \cdot g$ monoton steigend?

   (b) Seien f und g zwei beschränkte Funktionen

   $$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}.$$

   Sind $f \circ g$ und $f \cdot g$ beschränkt?

5. **Stetigkeit von Funktionen**

   (a) Überprüfen Sie die folgenden Funktionen auf Stetigkeit:

   $$\begin{aligned} e(x) &= \operatorname{sgn}(x) && x \in \mathbb{R}, \\ f(x) &= \operatorname{sgn}(x) && x \in \mathbb{Z}, \\ g(x) &= 0^x && x \in \mathbb{R}_0^+, \\ h(x) &= e^{-\frac{x^2}{2}} && x \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

   (b) Ist die folgende Funktion in 0 stetig?

   $$f(x) := \begin{cases} \frac{x^2+7}{4x^3+2}, & x > 0 \\ \frac{1}{8}, & x = 0. \end{cases}$$

   Wenn nein, wie müssten Sie $f(0)$ ändern um eine stetige Funktion zu erhalten?

6. **Funktionen**

   Sei

   $$f(x) := \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

   Zeigen Sie: f ist genau in 0 stetig.