Mathematik II
SS 2015
3. Mathematicaprojekt
Aufgaben für den 01.07.2015

1. **Gauß-Elimination**

   Erstellen Sie ein Modul *myGauss*$[A, b]$, das mit Hilfe des Gauß'schen Eliminationsverfahrens die Lösung x des Gleichungssystems

   $$Ax = b$$

   für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}, b \in \mathbb{R}^n$ berechnet. Die Befehle *LinearSolve*, *RowReduce* usw. dürfen nicht verwendet werden. Testen Sie Ihr Modul an dem Beispiel

   $$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

2. **Laplace-Erweiterung**

   Erstellen Sie ein Modul *myDet*$[A]$, das die Determinante von $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit Hilfe der Laplace-Entwicklung

   $$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

   berechnet. Der Befehl *Det* darf nicht verwendet werden. Testen Sie Ihr Modul an den Beispielen

   $$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 7 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. **Cramersche Regel**

   Erstellen Sie ein Modul *myCramer*$[A, b]$, das mit Hilfe der Cramerschen Regel die Lösung x des Gleichungssystems

   $$Ax = b$$

   berechnet. Verwenden Sie zur Berechnung der auftretenden Determinanten *myDet* aus Beispiel 2 und testen Sie Ihr Modul an dem Beispiel

   $$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 7 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

4. **Lineare Gleichungssysteme**

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 6 \\ 5 & -3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix},$$

und

$$C = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ 2 & -5 & 5 \\ -4 & 10 & -10 \end{pmatrix}, \qquad d = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -7 \\ 14 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichungssysteme $Ax = b$ und $Cx = d$.

5. **Matrixexponential**

Das Matrixexponential einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist (analog zum skalaren Fall) definiert als

$$\exp[A] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k$$

wobei $A^k = A \cdot A^{k-1}$ und $A^0 = I$. Erstellen Sie ein Modul *myExp*$[A, n]$, das für eine gegebene Matrix A die Approximation

$$S_n(A) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} A^k$$

berechnet.

6. **Gedämpfter linearer Oszillator**

Das lineare Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} q'(t) &= p(t) \\ p'(t) &= -q(t) - 2p(t) \end{aligned}$$

beschreibt die eindimensionale Bewegung eines an einem Federpendel befestigten massebehafteten Körpers (unter Berücksichtigung von Reibungsverlusten) durch die Ortskoordinate q und den Impuls p. Die exakte Lösung des Systems lässt sich durch

$$\begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = \exp\left[t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} q(0) \\ p(0) \end{pmatrix}$$

darstellen. Berechnen Sie mit Ihrem Modul *myExp* aus Beispiel 5 eine Näherungslösung

$$\begin{pmatrix} \hat{q}(t) \\ \hat{p}(t) \end{pmatrix} = S_n\left(t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} q(0) \\ p(0) \end{pmatrix}$$

und vergleichen Sie diese mit der exakten Lösung

$$\begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} 1+t & t \\ -t & 1-t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q(0) \\ p(0) \end{pmatrix}$$

für $p(0) = q(0) = 1/2$ und $n = 3, 4, 5$.