§1 Markov-Kette

Ein Markov-Kette ist ein mathematisches Modell, das sich beim Studium komplexer Systeme als nützlich erweist. Die grundlegenden Begriffe der Markov-Kette sind der Zustand eines Systems und der Übergang von einem Zustand in einen anderen. Man sagt, ein System befinde sich in einem bestimmten Zustand, wenn die Variablen, die das System vollständig beschreiben, die diesem Zustand zugeordneten Werte annehmen. Ein Übergang des Systems von einem Zustand in einen anderen liegt vor, wenn die das System beschreibenden Variablen ihre Werte entsprechend ändern.

Ziel dieses Abschnitts ist es, die Markov-Ketten mit disktreter Zeit zu definieren.

1.1 Markov-Kette mit diskreter Zeit

Um die Markov-Kette mit diskreter Zeit zu untersuchen, nehmen wir an, dass die Zeitspanne zwischen je zwei Übergändgen konstant ist.

1.1.1 Definition: Ein stochastischer Prozess $\{X(n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ heißt Markov-Kette mit diskreter Zeit, wenn für alle $i, j, i_0, \ldots, i_{n-1} \in E$

$$\mathbb{P}[X(n+1)=j \mid X(n)=i,\ X(n-1)=i_{n-1},\ \ldots,\ X(0)=i_0] = \mathbb{P}[X(n+1)=j \mid X(n)=i],$$

wobei $E=\mathbb{N}$ ein Zustandsraum des Prozesses $\{X(n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist.

d.h. wenn, bildlich gesprochen, die Zukunft nur von der Gegenwart, nicht aber von der Vergangenheit abhängt. Obige Eigenschaft nennt man Markov-Eigenschaft (Gedächtnislosigkeit) des stochastischen Prozesses.

1.1.2 Definition: Der Ausdruck

$$\mathbb{P}[X(n+1)=j \mid X(n)=i] = p_{i\,j}(n),$$

$$0 \le p_{i\,j}(n) \le 1$$

heißt Übergangswahrscheinlichkeit von i nach j zur Zeitpunkt n.

1.1.3 Definition: Falls die bedingte Wahrscheinlichkeit von $n\in\mathbb{N}_0$ nicht abhängt, d.h

$$\mathbb{P}[X(n+1)=j \mid X(n)=i] = \mathbb{P}[X(1)=j \mid X(0)=i] = p_{i\,j}$$

dann heißt die Markov-Kette homogen, sonst inhomogen.

1.1.4 Definition: Die endliche oder unendliche Matrix der Übergangswahrscheinlichkeiten

$$\mathbf{P} = \left(p_{i\,j}\right)_{i,j\in E} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots \\ p_{21} & p_{22} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

heißt die Übergangsmatrix.

1.1.5 Definition: Für jede Markov-Kette gilt

$$\sum_{j\in E} p_{i\,j} = 1, \; i \in E$$

Normierungseigenschaft, dann heißt die Übergangsmtrix P heißt stochastische Matrix.

1.2 Klassifikation der Zustände

1.2.1 Definition: Ein Zustand $j \in E$ heißt erreichbar vom Zustand $i \in E$, $i \to j$, wenn existiert $n \geq 0$, $p_{i\,j}(n) > 0$.

1.2.2 Definition: Zwei wechselseitig erreichbare Zustände $i \in E$ und $j \in E$ heißen kommunizierend, in Zeichen $i \leftrightarrow j$.

1.2.3 Definition: Sind alle Zustände kommunizierend, so heißt die Markov-Kette irreduzibel, es ist also jeder Zustand von jedem Zustand ist erreichbar.

1.2.4 Definition: Ein Zustand $i \in E$ heißt absorbierend, wenn für jedes $n > 0$ $p_{i\,i}(n) = 1$.

1.2.5 Bemerkung: $i \leftrightarrow j$ ist eine Äquivalenzrelation: Simmetrie und Reflexivität gelten per Definition, zudem gilt für $i \leftrightarrow k \leftrightarrow j$ und geeigneten $n, m \in \mathbb{N}_0$ mit $p_{i\,k}(n) > 0$, $p_{k\,j}(s) > 0$:

$$p_{i\,j}(n+m) = \sum_{\nu\in E} p_{i\,\nu}(n)\, p_{\nu\,j}(m) \geq p_{i\,k}(n)\, p_{k\,j}(m) > 0.$$

Bezeichne $\tau_j^{(k)} : \Omega \to \mathbb{N}$ Zeitpunkt des k-ten Besuches in $j \in E$.

Bezeichne

$$f_{i\,j}(n) = \mathbb{P}\left[\tau_j^{(1)} = n \mid X(0) = i\right]$$

die Wahrscheinlichkeit, dass die Markov-Kette, die in i startet nach n Schritten das erste Mal nach 0 in j eintrifft.

1.2.6 Satz Für die Wahrscheinlichkeit $f_{i\,j}(n)$ gilt

$$f_{i\,j}(n) = \begin{cases} p_{i\,j} & n = 1 \\ \sum_{k\neq j} p_{i\,k}\; f_{k\,j}(n-1) & n \geq 2 \end{cases}$$

▼

Beweis:

Für $n \geq 2$

$$f_{i\,j}(n) = \sum_{k\neq j} \mathbb{P}[X(1) = k,\; X(2) \neq j,\; \ldots,\; X(n-1) \neq j,\; X(n) = j \mid X(0) = i] =$$

$$= \sum_{k\neq j} \mathbb{P}[X(1) = k \mid X(0) = i]\, \mathbb{P}[X(2) \neq j,\; \ldots,\; X(n-1) \neq j,\; X(n) = j \mid X(1) = k,\; X(0) = i] =$$

$$= \sum_{k\neq j} p_{i\,k}\, \mathbb{P}[X(2) \neq j,\; \ldots,\; X(n-1) \neq j,\; X(n) = j \mid X(1) = k] = \sum_{k\neq j} p_{i\,k}\; f_{k\,j}(n-1).$$

1.2.8 Definition: Ein Zustand $i \in E$ einer Markov-Kette mit diskreter Zeit heißt rekurrent, wenn

$$\mathbb{P}\left[\tau_i^{(1)} < \infty \,\middle|\, X(0) = i\right] = \sum_{n=1}^{\infty} f_{i\,i}(n) = 1,$$

d.h. wenn die Markov-Kette mit Sicherheit nach i zurückkehrt.

1.2.9 Definition: Ein rekurrenter Zustand $i \in I$ einer Markov-Kette mit diskreter bzw. kontinuierlicher Zeit heißt positiv rekurrent, wenn

$$\mathbb{E}\left[\tau_i^{(1)}\right] = \sum_{n=1}^{\infty} n \,\mathbb{P}\mathrm{r}\left[\tau_i^{(1)} = n \mid X_0 = i\right] = \sum_{n=1}^{\infty} n \; f_{i\,i}(n) = : m_{i\,i} < \infty,$$

d.h. wenn die mittlere Rückkehrzeit $m_{i\,i}$ endlich ist.

1.2.10 Definition: Ein Zustand $i \in I$ einer Markov-Kette heißt null rekurrent, wenn er rekurrent aber nicht positive rekurrent ist, d.h.

$$\mathbb{E}\left[\tau_i^{(1)}\right] = \infty.$$

1.2.11 Definition: Ein Zustand einer Markov-Kette mit diskreter Zeit heißt periodish mit Periode $d_i > 1$, falls aufeinanderfolgende Rückkünfte nach i nur an Vielfachen von d_i (d_i maximal) möglich sind, d.h. falls $d_i$die größte natürliche Zahl ist, so daß $p_{i\,i}(n) = 0$ für alle nicht durch d_i teilbaren Zahlen n gilt. Gibt es kein solches $d_i > 1$, so heißt i aperiodisch, d.h. es gilt damit

$$d_i = \mathrm{ggT}\,\{n : p_{i\,i}(n) > 0\} = 1.$$

1.2.12 Definition: Eine Markov-Kette heißt aperiodish bzw. rekurrent bzw. transient bzw. positiv rekurrent bzw. null rekurrent wenn alle Zustände aperiodish bzw. rekurrent bzw. transient bzw. positiv rekurrent bzw. null rekurrent sind.

1.3 Beispiel eines Spielzeugfabrikanten. Zustandswahrscheinlichkeiten

Als ein sehr einfaches Beispiel einer homogenen Markov-Kette mit diskreter Zeit der soeben definierten Art kann man sich den Geschäftsablauf eines Spielzeugfabrikanten vorstellen. Der Fabrikant ist in das Geschäft mit Neuheiten der Spielzeugbranche verwickelt. Er kann sich dabei in einem der Beiden folgenden Zustände befinden: er ist im Zustand 1, wenn das zur Zeit von ihm produzierte Spielzeug beim Publikum grossen Anklang findet; er befindet sich jedoch im Zustand 2, wenn sein Artikel nicht die Gunst der Käufer findet.

Also für das Zustandsraum der Markov-Kette $\{X(n)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$, die den Zustand des Fabrikantes zum Zeitpunkt n angibt, erhält man

$$E = \{1, 2\}.$$

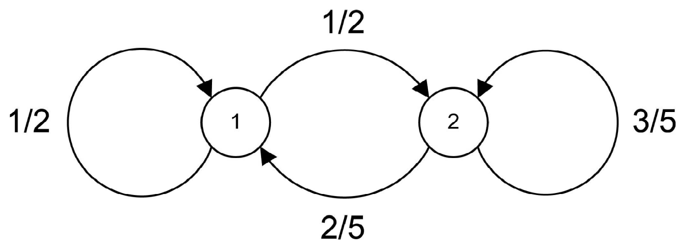
Nehmen wir an, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er während der nächsten Woche im Zustand 1 bleibt, wenn er am Anfang im Zustand 1 ist, 1/2 (50%) beträgt. Demzufolge besteht eine Wahrscheinlichkeit von 1/2 (50%) dafür, dass ein Übergang vom Zustand 1 in den ungünstigen Zustand 2 stattfindet. Ist der Fabrikant im Zustand 2, dann erprobt er neue Spielsachen, und er kann nach einer Woche wieder im Zustand 1 sein mit einer Wahrscheinlichkeit von 2/5 (40%) oder immer noch in dem unvorteilhaften Zustand 2 mit einer Wahrscheinlichkeit von 3/5 (60%). Also haben wir für Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{i\,j}$

$$p_{11} = \mathbb{P}[X(n+1) = 1 \mid X(n) = 1] = 1/2,$$
$$p_{12} = \mathbb{P}[X(n+1) = 1 \mid X(n) = 2] = 1/2,$$
$$p_{21} = \mathbb{P}[X(n+1) = 2 \mid X(n) = 1] = 2/5,$$
$$p_{22} = \mathbb{P}[X(n+1) = 2 \mid X(n) = 2] = 3/5$$

oder in Matrixschreibweise

$$\mathbf{P} = (p_{i\,j})_{i,j\in E} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 2/5 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

Ein dem System entsprechendes Diagramm, in dem die Zustände und Übergängswahrscheinlichkeiten graphisch dargestellt sind, ist das folgende:



Die Übergangsmatrix **P** beschreibt also die Markov-Kette vollständig. Die Zeilensummen dieser Matrix sind alle gleich 1, und die Matrix enthält nur nicht-negative Elemente, die folglich nicht grösser als 1 sein können. Eine Matrix mit diesen Eigenschaften heißt stochastische Matrix (siehe Definition 1.1.5). Diese Matrix dient uns nun dazu, alle Fragen über den Prozess zu klären. Zum Beispiel kann es uns interessieren, mit welcher Wahrschein-lichkeit der Spielzeugfabrikant nach n Wochen im Zustand 1 sein wird, wenn wir wissen, dass er zu Beginn dieser n Wochen im Zustand 1 ist. Um diese und andere Probleme zu lösen, definieren wir eine Zustandswahrscheinlichkeit $\pi_i(n)$.

1.3.1 Definition: Der Ausdruck

$$\mathbb{P}[X(n) = i] = \pi_i(n), \quad i \in E, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

bezeichnet die Zustandswahrscheinlichkeit von $i \in E$ zum Zeitpunkt n.

Das ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich das System nach n Übergängen, beziehungsweise Zeitabschnitten, im Zustand $i \in E$ befindet, wobei der Zustand des Systems bei $n = 0$ bekannt ist. Offenbar gilt.

1.3.2 Satz Für eine homogene Markov-Kette $\{X(n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ gilt

$$\mathbb{P}[X(1) = i_1, \ldots, X(n) = i_n \mid X(0) = i_0] = p_{i_0\,i_1}\, p_{i_1\,i_2} \cdots p_{i_{n-1}\,i_n}.$$

▼

Beweis:

Aus dem ***Mutiplikationssatz*** folgt für die von uns gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$\mathbb{P}[A_1, A_2, \ldots, A_n \mid A_0] = \mathbb{P}[A_1 \mid A_0]\,\mathbb{P}[A_2 \mid A_0, A_1]\,\mathbb{P}[A_3 \mid A_0, A_1, A_2] \ldots \mathbb{P}[A_n \mid A_0\, A_1, \ldots, A_{n-1}].$$

Dann erhält man für eine Markov-Kette

$$\mathbb{P}[X(1) = i_1, \ldots, X(n) = i_n \mid X(0) = i_0] = \mathbb{P}[X(1) = i_1 \mid X(0) = i_0]\,\mathbb{P}[X(2) = i_2 \mid X(0) = i_0, X(1) = i_1] \ldots . \\ \mathbb{P}[X(n) = i_n \mid X(0) = i_0, X(1) = i_1, \ldots, X(n-1) = i_{n-1}]$$

sodaß wir mit der Markov-Eigenschaft erhalten

$$\mathbb{P}[X(1) = i_1, \ldots, X(n) = i_n \mid X(0) = i_0] = \mathbb{P}[X(1) = i_1 \mid X(0) = i_0]\,\mathbb{P}[X(2) = i_2 \mid X(1) = i_1] \ldots \\ \mathbb{P}[X(n) = i_n \mid X(n-1) = i_{n-1}], \text{ oder}$$

$\mathbb{P}[X(1) = i_1,\ \ldots,\ X(n) = i_n \mid X(0) = i_0] = p_{i_0\, i_1}\, p_{i_1\, i_2} \cdots p_{i_{n-1}\, i_n}$

1.3.3 Bemerkung: Aus vorhergehenden Satz gilt

$$\mathbb{P}[X(0) = i_0,\ X(1) = i_1,\ \ldots,\ X(n) = i_n] = \pi_0(0)\, p_{i_0\, i_1}\, p_{i_1\, i_2} \cdots p_{i_{n-1}\, i_n}.$$

1.3.4 Satz (Chapman-Kolmogorov Gleichungen): Für Zustandswarscheinlichkeiten gilt

$$\sum_{i \in E} \pi_i(n) = 1,$$

$$\pi_j(n+1) = \sum_{i \in E} \pi_i(n)\, p_{i\, j},\ \ j \in E,\ \ n \in \mathbb{N}_0.$$

▼

Beweis:

Nach dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit für homogene Markov-Kette gilt:

$\pi_j(n+1) = \mathbb{P}[X(n+1) = j] = \sum_{i \in E} \mathbb{P}[X(n+1) = j \mid X(n) = i]\, \mathbb{P}[X(n) = i] = \sum_{i \in E} \pi_i(n)\, p_{i\, j}$

Wenn wir $\boldsymbol{\pi}(n) = (\pi_1(n), \pi_2(n),\ \ldots)$ als Zeilenvektor definieren mit den Komponenten $\pi_i(n)$, $i \in E$, dann folgt aus dem Satz 1.2.4 sofort

$$\boldsymbol{\pi}(n+1) = \boldsymbol{\pi}(n)\, \mathbf{P},\ n \in \mathbb{N}_0,$$

und daraus ergibt sich

$$\boldsymbol{\pi}(1) = \boldsymbol{\pi}(0)\, \mathbf{P}$$

$$\boldsymbol{\pi}(2) = \boldsymbol{\pi}(1)\, \mathbf{P} = \boldsymbol{\pi}(0)\, \mathbf{P}^2$$

$$\boldsymbol{\pi}(3) = \boldsymbol{\pi}(2)\, \mathbf{P} = \boldsymbol{\pi}(0)\, \mathbf{P}^3$$

und allgemein

1.3.5 Satz: Für Zustandswarscheinlichkeitsvektor $\boldsymbol{\pi}(n) = (\pi_1(n), \pi_2(n),\ \ldots)$ gilt

$$\boldsymbol{\pi}(n) = \boldsymbol{\pi}(0)\, \mathbf{P}^n,\ n \in \mathbb{N}_0$$

▼

Beweis: Mit volständiger Induktion.

So ist es möglich, den Wahrscheinlichkeitsvektor $\boldsymbol{\pi}(n)$ dafür zu berechnen, dass das System nach n Übergängen in jedem der möglichen Zuständen ist. Dazu hat man lediglich den Zeilenvektor der Zustandswahrscheinlichkeiten zu Beginn des Prozesses, also $\boldsymbol{\pi}(0)$ mit der n-ten Potenz der Übergangsmatrix $\mathbf{P}$ von rechts zu multiplizieren.

Für $i \in E$ sei $H_i = \inf\,\{n \geq 0 :\ X(n) \neq i\}$ die Zufallsvariable der Verweilzeit im Zustand i.

1.3.6 Satz: Die Verweilzeit H_i in jedem Zustand $i \in E$ ist geometrischverteilt, d.h.

$$\mathbb{P}[H_i = n \mid X(0) = i] = (1 - p_{i\, i})\, p_{i\, i}^n,\ n \in \mathbb{N}_0$$

▼

Beweis:

$\mathbb{P}[H_i = n \mid X(0) = i] = \mathbb{P}[X(1) = i,\ X(2) = i,\ \ldots,\ X(H_i) = i,\ X(H_i + 1) \neq i \mid X(0) = i] =$

$$= \mathbb{P}[X(1) = i \mid X(0) = i]\, \mathbb{P}[X(2) = i \mid X(1) = i,\ X(0) = i] \ldots \mathbb{P}[X(H_i + 1) \neq i \mid X(H_i) = i,\ \ldots,\ X(0) = i] =$$

$$= p_{i\,i} \ldots p_{i\,i}(1 - p_{i\,i}) = p_{i\,i}^n (1 - p_{i\,i}).$$

Wie wollen die hergeleiteten Beziehungen am Beispiel des Spielzeugfabrikanten erläutern.

1. Beginnt der Fabrikant mit einem erfolgreichen Spielzeug, dann ist

$\boldsymbol{\pi}(0) = (1, 0)$ und

$$\boldsymbol{\pi}(1) = \boldsymbol{\pi}(0)\, \mathbf{P} = (1, 0) \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 2/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

```
{1, 0}.{{1/2, 1/2}, {2/5, 3/5}}
```

```
 1   1
{-, -}
 2   2
```

und daher

$\boldsymbol{\pi}(1) = (1/2,\ 1/2).$

Nach einer Woche ist der Spielzeugfabrikant ebenso wahrscheinlich erfolgreich wie erfolglos. Nach zwei Wochen ergibt sich

$$\boldsymbol{\pi}(2) = \boldsymbol{\pi}(1)\, \mathbf{P} = (1/2,\ 1/2) \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 2/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

```
{1/2, 1/2}.{{1/2, 1/2}, {2/5, 3/5}}
```

```
  9   11
{--, --}
 20   20
```

und daher

$\boldsymbol{\pi}(2) = (9/20,\ 11/20),$

sodass der Fabrikant eher erfolglos sein wird.

Nach drei Wochen findet man auf die gleiche Art

```
{1, 0}.MatrixPower[{{1/2, 1/2}, {2/5, 3/5}}, 3]
```

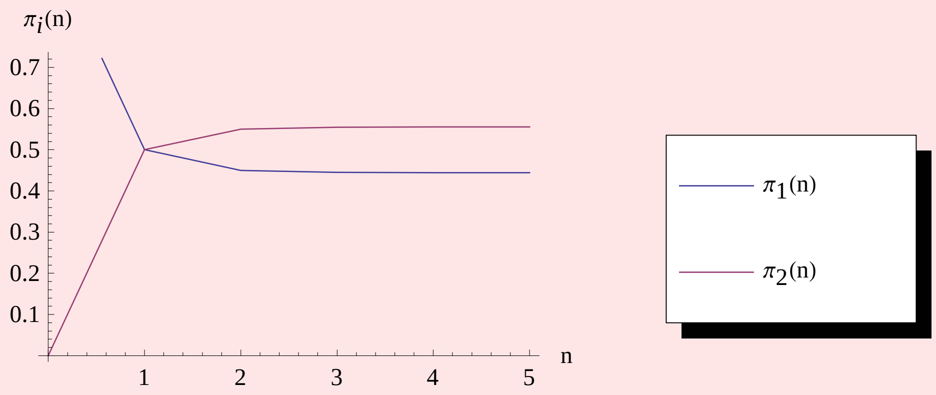
```
  89   111
{---, ---}
 200   200
```

$$\boldsymbol{\pi}(3) = \boldsymbol{\pi}(0)\, \mathbf{P}^3 = (1, 0) \begin{pmatrix} 89/200 & 111/200 \\ 111/250 & 139/250 \end{pmatrix} = (89/200,\ 111/200).$$

Eine interessante Tendenz wird sichtbar, wenn wir $\pi_i(n)$ als Funktion von n berechnen, wie es in Tabelle durchgeführt ist.

```
Needs["PlotLegends`"]
pi[0] = {1, 0};
Pm = {{1/2, 1/2}, {2/5, 3/5}};
pi[n_] := pi[0].MatrixPower[Pm, n];
tb = Table[{n, pi[n][[1]], pi[n][[2]]}, {n, 0, 5}];
TableForm[tb, TableHeadings → {None, {"n", "π1(n)", "π2(n)"}}] // N
ListPlot[{Table[{n, pi[n][[1]]}, {n, 0, 5}], Table[{n, pi[n][[2]]}, {n, 0, 5}]},
 Joined → True, PlotLegend → {"π1(n)", "π2(n)"}, LegendPosition → {1.1, -0.4},
 AxesLabel → {"n", "πi(n)"}]
```

n	$\pi_1(n)$	$\pi_2(n)$
0.	1.	0.
1.	0.5	0.5
2.	0.45	0.55
3.	0.445	0.555
4.	0.4445	0.5555
5.	0.44445	0.55555



Es scheint, als ob mit wachsendem n die Grösse $\pi_1(n)$ gegen 4/9 und $\pi_2(n)$ gegen 5/9 streben.

2. Startet der Spielzeugfabrikant mit einem ungünstigen Artikel, ist also

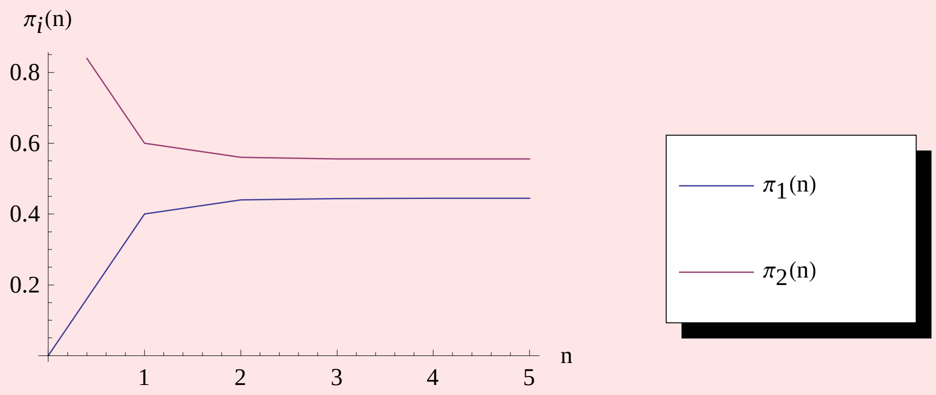
$\boldsymbol{\pi}(0) = (0, 1)$ oder

$\pi_1(0) = 0, \pi_2(0) = 1,$

dann erhält man für $\pi_i(n)$ die folgende Tabelle.

```
Needs["PlotLegends`"]
pi[0] = {0, 1};
Pm = {{1/2, 1/2}, {2/5, 3/5}};
pi[n_] := pi[0].MatrixPower[Pm, n];
tb = Table[{n, pi[n][[1]], pi[n][[2]]}, {n, 0, 5}];
TableForm[tb, TableHeadings → {None, {"n", "π1(n)", "π2(n)"}}] // N
ListPlot[{Table[{n, pi[n][[1]]}, {n, 0, 5}], Table[{n, pi[n][[2]]}, {n, 0, 5}]},
 Joined → True, PlotLegend → {"π1(n)", "π2(n)"}, LegendPosition → {1.1, -0.4},
 AxesLabel → {"n", "πi(n)"}]
```

n	$\pi_1(n)$	$\pi_2(n)$
0.	0.	1.
1.	0.4	0.6
2.	0.44	0.56
3.	0.444	0.556
4.	0.4444	0.5556
5.	0.44444	0.55556



In diesem Fall scheint es wiederum so zu sein, dass mit wachsendem n $\pi_1(n)$ gegen 4/9 und $\pi_2(n)$ gegen 5/9 konvergieren.

1.4 Die Eigenschaft der Ergodizität. Konvergenzsätze.

Somit sind anscheinend die Zustandswahrscheinlichkeiten nach einer grossen Anzahl von Übergengen beziehungsweise Zeitabschnitten unabhängig vom Anfangszustand des Systems. In der Tat weisen sehr viele Markov-Kette diese Eigenschaft auf.

1.4.1 Definition: Eine Markov-Kette heißt ergodisch, wenn sie irreduzibel, positiv rekurrent und im Fall diskreter Zeit auch aperiodisch ist.

In diesem Fall kann aus einer einzigen genügend langen Realisierung des Prozesses schon die gesamte Information über den Prozess gewonnen werden. Man kann hier die Ensemble-Mittelwerte durch die entsprechenden Zeit-Mittelwerte ersetzen (stimmen also zeitliche und punkteise Limites überein).

1.4.2 Definition: Man sagt, eine Markov-Kette mit diskreter Zeit besitzt die Grenzverteilung π_i, $i \in E$, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \pi_i(n) = \pi_i.$$

1.4.3 Satz: Eine irreduzible, positive rekurrente und nicht periodische Markov-Kette mit diskreter Zeit mit der Übergangsmatrix **P** besitzt einen stationären Wahrscheinlichkeitsvektor π, dessen Komponenten

$\pi = (\pi_0, \pi_1, \ldots)$ die folgenden ‘Zeitlimites’ sind:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{n} p_{i\,j}(s) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{s=1}^{n} \pi_j(s) = \lim_{n\to\infty} \pi_j(n) = \frac{1}{m_{j\,j}} =: \pi_j$$

Wir werden eine Markov-Kette, deren Grenzverteilung unabhängig von den Anfangsbedingungen ist, als ergodisch bezeichnen. Etwas später werden wir auch solche Markov-Kette untersuchen, deren Grenzverteilung abhängig ist von der Anfangssituation des Systems.

Für ergodische Markov-Kette können wir die Grösse π_i, $i \in E$, definieren als die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das System nach einer sehr grossen anzahl von Übergängen (in Wahrheit nach unendlich vielen Übergängen) im Zustand i ist. Demzufolge gilt für den Zeilenvektor $\boldsymbol{\pi}$ mit den Komponenten π_i

$$\boldsymbol{\pi} = \lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\pi}(n).$$

Man nennt ihn den Vektor der Grenzzustandswahrscheinlichkeiten. Wenden wir diese Beziehung für den Ausdruck aus dem Satz 1.3.4 an, erhält man also

1.4.4 Satz: Für ergodische Markov-Kette genügt der Vektor $\boldsymbol{\pi}$ der folgenden Gleichung

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\,\mathbf{P}$$

mit der Normierungseigenschaft

$$\sum_{i\in E} \pi_i = 1.$$

▼

1.4.5 Bemerkung: Endliche irreduzible nicht periodische Markov-Kette mit diskreter Zeit ist also positiv rekurrent und hat genau eine stationäre Verteilung.

Die Gleichungen aus dem Satz 1.2.5 können wir verwenden zur Berechnung der Grenzverteilung eines jeden ergodischen Prozesses. Im Fall des Spielzeugfabrikanten liefern diese Gleichungen

$$\pi_1 = 1/2\,\pi_1 + 2/5\,\pi_2$$
$$\pi_2 = 1/2\,\pi_1 + 3/5\,\pi_2$$
$$\pi_1 + \pi_2 = 1.$$

Die einzige Lösung dieses Systems ist $\pi_1 = 4/9$, $\pi_2 = 5/9$. Natürlich sind das die gleichen Werte, die wir schon nach unseren Tabellen für $\pi_i(n)$ für die Grenzwahrscheinlichkeiten vermutet hatten.

In vielen Anwendungen sind die Grenzverteilungen die einzigen Grössen, die von Interesse sind. Es mag beispielweise ausreichen zu wissen, das unser Spielzeugfabrikant während 4/9 des Zeitablaufs erfolgreich ist, während er in 5/9 der Zeit ungeschickt operiert. Die Schwierigkeit, die Grenzwahrscheinlichkeiten einer ergodischen Markov-Kette zu finden, ist also identisch mit der, ein System von $N + 1$ ($|E| = N$) linearen Gleichungen zu lösen.

Jedoch müssen wir uns der Tatsache bewusst sein, dass die Zahlen π_i nur dann eine hinreichend zuverlässige Beschreibung des Prozesses darstellen, wenn bereits so viele Zeitabschnitte vergangen sind, dass die Auswirkungen der Anfangssituation nahezu verschwunden sind.

Im folgenden Abschnitt werden wir einen Einblick in den ablauf des Prozesses während der Übergangsperiode gewinnen, in der sich die Zustandswahrscheinlichkeiten ihren Grenzwerten nähern.

1.5 Die erzeugende Funktion (Die z-Transformation)

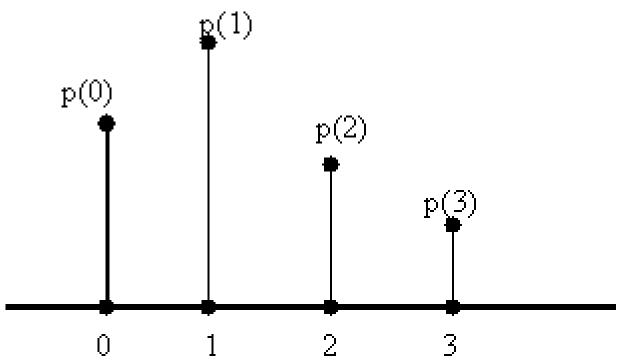
Zum Studium des Prozessablaufes und um theoretischer Klarheit willen ist es nützlich, die Markov-Kette mit Hilfe der erzeugenden Funktion oder, wie wir sie nennen wollen, der z-Transformierten zu untersuchen.

Das Gleichungssystem $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\,\mathbf{P}$, bei dem es sich ja um Differenzengleichungen handelt, kann auch durch z-Transformierte gelöst werden. Dazu wird die z-Transformierte eingeführt.

1.5.1 Definition: Die Funktion

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)\, z^n,\ z \in \mathbb{C},\quad |z| < 1$$

heißt z-Transformierte für die beliebige Funktion $p(n)$ mit diskretem Argument $n \in \mathbb{N}_0$.



Die z-Transformation ist bei der Behandlung von Markov-Ketten nützlich, da die dort vorkommenden transienten Wahrscheinlichkeitsanteile geometrische Folgen bilden. Für derartige Folgen gestattet die z-Transformation eine geschlossene Darstellung. Wir bilden nun die z-Transfomationen gewisser typischer Zeitfunktionen, auf die wir bald stossen werden.

1.5.2 Beispiel: Sei

$$p(n) = \begin{cases} 1 & \text{für } n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \\ 0 & \text{für } n < 0. \end{cases}$$

Gesucht ist die entsprechende z-Transformation.

▼

Lösung: Für die z-Transformierte erhält man also:

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)\, z^n = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \text{ für } |z| < 1$$

1.5.3 Beispiel: Gegeben ist eine geometrische Folge

$$p(n) = \alpha^n,\ n \geq 0.$$

Gesucht ist die entsprechende z-Transformation.

▼

Lösung: Für die z-Transformierte erhält man also:

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)\, z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha\, z)^n = \frac{1}{1-\alpha\, z} \text{ für } |\alpha\, z| < 1.$$

1.5.4 Beispiel: Gegeben ist eine Folge

$$p(n) = n\, \alpha^n,\ n \geq 0.$$

Gesucht ist die entsprechende z-Transformation.

▼

Lösung: Aus dem Beispiel 1.3.3 bekannt ist, dass

$$P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha\, z)^n = \frac{1}{1-\alpha\, z}.$$

Es folgt

$$\frac{d}{d\,z} P(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n\,\alpha^n\,z^{n-1} = \frac{\alpha}{(1-\alpha\,z)^2}.$$

Danach ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} n\,\alpha^n\,z^n = z\,\frac{d}{d\,z} P(z) = \frac{\alpha\,z}{(1-\alpha\,z)^2}.$$

1.5.5 Beispiel: Gegeben ist die Funktion $p(n)$ und ihre z-Transformierte $P(z)$. Man bestimme die z-Transformierte für die Funktion $g(n) = p(n+1),\ \ n \geq 0$.

▼

Lösung: Die z-Transformierte von $g(n)$ ist gleich

$$\sum_{n=0}^{\infty} g(n)\,z^n = \sum_{n=0}^{\infty} p(n+1)\,z^n = \sum_{m=1}^{\infty} p(m)\,z^{m-1} = z^{-1}(P(z) - p(0)).$$

Der Leser sollte unbedingt mit dem Inhalte der nächsten Tabelle vertraut sein, da davon in Beispielen und Beweisen ausführlich Gebrauch gemacht wird.

Funktion	z – Transformierte
$f(n)$	$F(z)$
$f_1(n) + f_2(n)$	$F_1(z) + F_2(z)$
$k\,f(n)$, k – Konst	$k\,F(z)$
$f(n-1)$	$zF(z)$
$f(n+1)$	$z^{-1}(F(z) - F(0))$
α^n	$\frac{1}{1-\alpha z}$
1	$\frac{1}{1-z}$
$n\alpha^n$	$\frac{\alpha z}{(1-\alpha z)^2}$
n	$\frac{z}{(1-z)^2}$
$\alpha^n f(n)$	$F(\alpha z)$

1.6 Untersuchung von Markov-Ketten mit Hilfe der z-Transformation

Wie benützen jetzt die z-Transformation, um Markov-Kette zu analysieren. Offenbar kann man die z-Transformierte von Vektoren und Matrizen bilden, indem man die Transformierten ihrer einzelnen Komponenten berechnet.

Bezeichnen wir in diesem Sinne die z-Transformierte des Vektors $\boldsymbol{\pi}(n) = (\pi_1(n), \pi_2(n),\ \ldots)$ mit $\mathbf{\Pi}(z) = (\Pi_1(z), \Pi_2(z),\ \ldots)$,

$$\Pi_i(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \pi_i(n)\,z^n,\ \ i \in E.$$

1.6.1 Satz: Für die z-Transfomierte $\mathbf{\Pi}(z)$ des Vektors $\boldsymbol{\pi}(n)$ gilt

$$\mathbf{\Pi}(z) = \boldsymbol{\pi}(0)\,(\mathbf{I} - z\,\mathbf{P})^{-1}.$$

Dabei ist **I** die Einheitsmatrix.

▼

Beweis:

Transformieren wir die Gleichung

$$\boldsymbol{\pi}(n+1) = \boldsymbol{\pi}(n)\,\mathbf{P}$$

aus dem Abschnitt 1.2, dann erhalten wir nach Tabelle der z-Transformationen

$$z^{-1}(\mathbf{\Pi}(z) - \boldsymbol{\pi}(0)) = \mathbf{\Pi}(z)\,\mathbf{P}.$$

Durch elementare Umformung folgt daraus

$$\mathbf{\Pi}(z) - z\,\mathbf{\Pi}(z)\,\mathbf{P} = \boldsymbol{\pi}(0)$$
$$\mathbf{\Pi}(z)\,(\mathbf{I} - z\,\mathbf{P}) = \boldsymbol{\pi}(0)$$

und schliesslich

$$\mathbf{\Pi}(z) = \boldsymbol{\pi}(0)\,(\mathbf{I} - z\,\mathbf{P})^{-1}.$$

Die Transformierte des Vektors der Zustandswahrscheinlichkeiten ist also gleich einem Vektor, der durch Multiplikation des Vektors der Anfangswahrscheinlichkeiten $\boldsymbol{\pi}(0)$ mit dem Inversen der Matrix $\mathbf{I} - z\,\mathbf{P}$ von rechts entsteht. Das Inverse von $\mathbf{I} - z\,\mathbf{P}$ existiert immer für $|z| < 1$ (Invertierbarkeit der Matrizen mit dominierender Hauptdiagonale).

Es ist zu beachten, dass die Lösung aller mit Übergängen zusammenhängenden Probleme bereits in der Matrix $(\mathbf{I} - z\,\mathbf{P})^{-1}$enthalten ist. Um die vollständige Lösung eines solchen Problems zu erhalten, braucht man lediglich die Zeilen von $(\mathbf{I} - z\,\mathbf{P})^{-1}$mit den anfänglichen Zustandswahrscheinlichkeiten zu gewichten, zu addieren und für jedes Element des Resultats die inverse Transformierte zu bestimmen.

■ Wir behandeln nun das Problem des Spielzeugfabrikanten mit Hilfe der z-Transformation.

Wie es schon bekannt ist, in diesem Fall

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 2/5 & 3/5 \end{pmatrix}$$

und daher

$$\mathbf{I} - z\,\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{2}\,z & -\frac{1}{2}\,z \\ -\frac{2}{5}\,z & 1 - \frac{3}{5}\,z \end{pmatrix}$$

und

$$(\mathbf{I} - z\,\mathbf{P})^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{1-\frac{3}{5}\,z}{(1-z)\left(1-\frac{1}{10}\,z\right)} & \dfrac{\frac{1}{2}\,z}{(1-z)\left(1-\frac{1}{10}\,z\right)} \\ \dfrac{\frac{2}{5}\,z}{(1-z)\left(1-\frac{1}{10}\,z\right)} & \dfrac{1-\frac{1}{2}\,z}{(1-z)\left(1-\frac{1}{10}\,z\right)} \end{pmatrix}.$$

Jedes Element von $(\mathbf{I} - z\,\mathbf{P})^{-1}$ ist eine Funktion von z mit einem in Faktoren zerlegbaren Nenner $(1 - z)\left(1 - \frac{1}{10}\,z\right)$. Über die Partialbruchzerlegung können wir jedes Element als Summe von zwei Ausdrücken darstellen, nämlich einem mit dem Nenner $1 - z$ und einem mit dem Nenner $1 - \frac{1}{10}\,z$.

```
Apart[(1 - 3/5 z)/((1 - z) (1 - 1/10 z))]
Apart[(1/2 z)/((1 - z) (1 - 1/10 z))]
Apart[(2/5 z)/((1 - z) (1 - 1/10 z))]
Apart[(1 - 1/2 z)/((1 - z) (1 - 1/10 z))]
```

$$-\frac{50}{9\,(-10+z)}-\frac{4}{9\,(-1+z)}$$

$$\frac{50}{9\,(-10+z)}-\frac{5}{9\,(-1+z)}$$

$$\frac{40}{9\,(-10+z)}-\frac{4}{9\,(-1+z)}$$

$$-\frac{40}{9\,(-10+z)}-\frac{5}{9\,(-1+z)}$$

Danach hat die Matrix $(\mathbf{I}-z\,\mathbf{P})^{-1}$ folgende Gestalt:

$$(\mathbf{I}-z\,\mathbf{P})^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{\frac{4}{9}}{1-z}+\frac{\frac{5}{9}}{1-\frac{1}{10}\,z} & \frac{\frac{5}{9}}{1-z}+\frac{-\frac{5}{9}}{1-\frac{1}{10}\,z}\\ \frac{\frac{4}{9}}{1-z}+\frac{-\frac{4}{9}}{1-\frac{1}{10}\,z} & \frac{\frac{5}{9}}{1-z}+\frac{\frac{4}{9}}{1-\frac{1}{10}\,z}\end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{I}-z\,\mathbf{P})^{-1}=\frac{1}{1-z}\begin{pmatrix}\frac{4}{9} & \frac{5}{9}\\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9}\end{pmatrix}+\frac{1}{1-\frac{1}{10}\,z}\begin{pmatrix}\frac{5}{9} & -\frac{5}{9}\\ -\frac{4}{9} & \frac{4}{9}\end{pmatrix}.$$

Sei $\mathbf{H}(n)$ die Matrix, deren Elemente durch die z-Transformation in die Elemente von $(\mathbf{I}-z\,\mathbf{P})^{-1}$ übergehen. Nach Tabelle der z-Transformationen ist dann in userem Beispiel

$$\mathbf{H}(n)=\begin{pmatrix}\frac{4}{9} & \frac{5}{9}\\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9}\end{pmatrix}+\left(\frac{1}{10}\right)^{n}\begin{pmatrix}\frac{5}{9} & -\frac{5}{9}\\ -\frac{4}{9} & \frac{4}{9}\end{pmatrix}.$$

Wendet man schliesslich auf Gleichung

$$\mathbf{\Pi}(z)=\boldsymbol{\pi}(0)\,(\mathbf{I}-z\,\mathbf{P})^{-1}.$$

die der z-Transformation entsprechende inverse Abbildung an, so erhält man

$$\boldsymbol{\pi}(n)=\boldsymbol{\pi}(0)\,\mathbf{H}(n).$$

Ein Vergleich mit Gleichung

$$\boldsymbol{\pi}(n) \;=\; \boldsymbol{\pi}(0)\,\mathbf{P}^n$$

ergibt, dass

$$\mathbf{H}(n) = \mathbf{P}^n$$

gilt, und dass wir somit eine geeignete Technik zur Berechnung der n-ten Potenz der Übergangsmatrix in geschlossener Form gefunden haben. Der Vektor der Zustandswahrscheinlichkeiten zum Zeitpunkt n kann also berechnet werden, indem man den Vektor der Anfangswahrscheinlichkeiten von rechts mit der entsprechenden Matrix $\mathbf{H}(n)$ multipliziert. Das Element an der Stelle $(i,\ j)$ in der Matrix $\mathbf{H}(n)$ gibt die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass das System zur Zeit n im Zustand $j \in E$ sein wird, wenn es zur Zeit 0 im Zustand $i \in E$ war.

1. Wenn der Spielzeugfabrikant in dem günstigen Zustand 1 beginnt, dann ist

$$\boldsymbol{\pi}(0) = (1,\ 0) \text{ und}$$
$$\boldsymbol{\pi}(n) = \left(\frac{4}{9},\ \frac{5}{9}\right) + \left(\frac{1}{10}\right)^n \left(\frac{5}{9},\ -\frac{5}{9}\right) \text{ oder}$$
$$\pi_1(n) = \frac{4}{9} + \left(\frac{1}{10}\right)^n \frac{5}{9},\ \ \pi_2(n) = \frac{5}{9} - \left(\frac{1}{10}\right)^n \frac{5}{9}.$$

Die hier angegebenen Ausdrücke für $\pi_1(n)$ und $\pi_2(n)$ sind die exakte, analytische Darstellung der Zustandswahrscheinlichkeiten, die wir in Tabellen aus dem Abschnitt 1.2 mit Hilfe der Matrixmultiplikation erhalten hatten. Wenn n gross wird, streben $\pi_1(n)$ gegen $\frac{4}{9}$ und $\pi_2(n)$ gegen $\frac{5}{9}$: sie nähern sich den Grenzwahrscheinlichkeiten des Prozesses,

$$\lim_{n\to\infty} \pi_1(n) = \pi_1 = \frac{4}{9} \text{ und } \lim_{n\to\infty} \pi_2(n) = \pi_2 = \frac{5}{9}.$$

2. Beginnt der Spielzeugfabrikant im Zustand 2, dann haben wir

$$\boldsymbol{\pi}(0) = (0,\ 1) \text{ und}$$
$$\boldsymbol{\pi}(n) = \left(\frac{4}{9},\ \frac{5}{9}\right) + \left(\frac{1}{10}\right)^n \left(-\frac{4}{9},\ \frac{4}{9}\right) \text{ oder}$$
$$\pi_1(n) = \frac{4}{9} - \left(\frac{1}{10}\right)^n \frac{4}{9},\ \ \pi_2(n) = \frac{5}{9} + \left(\frac{1}{10}\right)^n \frac{4}{9}.$$

Einmal mehr zeigt sich, dass für wachsende n die Zustandswahrscheinlichkeiten gegen die Grenzwahrscheinlichkeiten des Prozesses streben,

$$\lim_{n\to\infty} \pi_1(n) = \pi_1 = \frac{4}{9} \text{ und } \lim_{n\to\infty} \pi_2(n) = \pi_2 = \frac{5}{9}.$$

Über die gestalt von $\mathbf{H}(n)$ kann man einige allgemeine Aussagen machen. Zunächst befindet sich unter den beteiligten Matrizen stets mindestens eine stochastische Matrix, die in $(\mathbf{I} - z\,\mathbf{P})^{-1}$ einer Matrix mit dem Faktor $\frac{1}{1-z}$ entspricht. Diese Aussage ist gleichbedeutend mit derjenigen, dass die Determinante von $\mathbf{I} - z\,\mathbf{P}$ für $z = 1$ verschwindet, oder dass eine stochastische Matrix mindestens einen Eigenwert 1 hat,

$$\mathrm{Det}(\mathbf{I} - z\,\mathbf{P}) = (1 - z)\,(\alpha_1 - z) \ldots (\alpha_N - z) = \alpha_1 \ldots \alpha_N (1 - z) \left(1 - \frac{z}{\alpha_1}\right) \ldots \left(1 - \frac{z}{\alpha_N}\right)$$

1.6.2 Bemerkung: Ist der Prozess ergodisch, dann gibt es genau eine stochastische Matrix in $\mathbf{H}(n)$. Darüber hinaus sind die Zeilen dieser stochastischen Matrix identisch, und jede Zeile ist gleich dem Vektor der Grenzwahrscheinlichkeiten des Prozesses. Diesen Anteil an $\mathbf{H}(n)$ bezeichnen wir als Stabilitätsanteil und bezeichnen ihn mit

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \ldots & \pi_N \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \pi_1 & \pi_2 & \ldots & \pi_N \end{pmatrix}$$

da er von n unabhängig ist.

Die übrigen Teile von $\mathbf{H}(n)$ stellen das vorübergehende (nicht stabile) Verhalten des Prozesses dar. Diese Ausdrücke sind Matrizen mit Faktoren der Form $\alpha^n,\ n\,\alpha^n,\ n^2\,\alpha^n$, usw. Natürlich kann $|\,\alpha\,|$ nicht grösser als 1 sein;

denn wenn ein $|\alpha|$ grösser als 1 wäre, würden die Beträge der zugehörigen Wahrscheinlichkeiten unbeschränkt zunehmen, was offenbar unmöglich ist. Dieser Anteil von $\mathbf{H}(n)$ stellt die abnehmenden geometrischen Folgen der Wahrscheinlichkeitskomponenten dar, die für Markov-Kette typisch sind. Wir bezeichnen diesen Teil mit $\mathbf{T}(n)$, da er von n abhängt. Da für ergodische Prozesse $|\alpha| < 1$ gilt für α, verschwindet $\mathbf{T}(n)$, wenn n über alle Grenzen wächst. Die Matrizen, aus denen sich $\mathbf{T}(n)$ zusammensetzt, haben eine interessante Eigenschaft. Ihre Zeilensumme verschwindet nähmlich, denn man kann die Komponenten von $\mathbf{T}(n)$ als Störungen der Grenzwahrscheinlichkeiten ansehen.

1.6.3 Definition: Matrizen, deren Zeilensummen verschwinden, bezeichnet man als Differential-Matrizen.

1.6.4 Satz: Für ergodische Markov-Kette ist

$$\mathbf{H}(n) = \mathbf{S} + \mathbf{T}(n),$$

wobei

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_N \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_N \end{pmatrix}$$

eine stochastische Matrix ist, in der jede Zeile mit dem Vektor $\boldsymbol{\pi}$ der Grenzwahrscheinlichkeiten überein-stimmt; und

$$\mathbf{T}(n) = \alpha^n \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} + \ldots$$

ist die Summe einer gewissen Anzahl von Differential-Matrizen mit geometrischen Koeffizienten, die mit wachsendem n gegen Null streben.

▼

Beweis:

1.7 Transiente Zustände, ergodische Klassen und periodisches Verhalten

Um einen tieferen Einblick in das Wesen der Markov-Kette zu gewinnen, benützen wir die z-Transformation zur Untersuchung einiger spezielle Prozesse, die ganz typische Eigenschaften aufweisen. Im Problem des Spielzeugfab-rikanten hatten beide Zustände auch noch nach sehr vielen Wochen positive Zustandswahrscheinlichkeiten. Im Gegensatz dazu ist es sogar bei ergodischen Prozessen möglich, dass gewisse Zustände Grenzwahrscheinlichkeiten von Null haben.

1.7.1 Definition: Ein Zustand der Markov-Kette heißt transient (d.h. vorübergehend), wenn er nach langer Zeit fast sicher nicht mehr auftreten.

1.7.2 Definition: Ein Zustand $i \in E$ der Markov-Kette ist genau dann absorbierend, wenn $p_{i\,i} = 1$ ist.

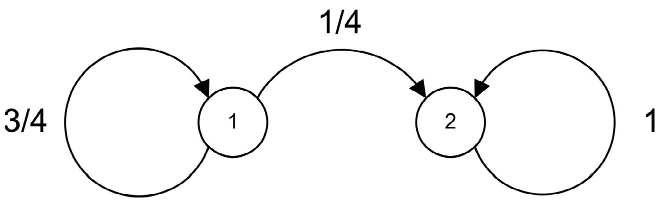
1.7.3 Beispiel: Markov-Ketter mit dem transient Zustand.

▼

Lösung: Betrachten wir das folgende Beispiel:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit dem Ablaufdiagramm



Ist das System im Zustand 1, dann besteht eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{4}$ für einen Übergang nach 2. Hat jedoch einmal ein solcher Übergang nach 2 stattgefunden, so bleibt das System für alle Zeiten im Zustand 2. Zustand 1 ist hier transient. Einen Zustand mit der Eigenschaft des Zustandes 2 nennt man absorbierend.

Nunmehr wollen wir wieder über die z-Transformation die Matrix $\mathbf{H}(n)$ berechnen.

$$\mathbf{I} - z\,\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{3}{4}\,z & -\frac{1}{4}\,z \\ 0 & 1 - z \end{pmatrix}$$

und

$$(\mathbf{I} - z\,\mathbf{P})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1-z}{(1-z)\left(1-\frac{3}{4}\,z\right)} & \frac{\frac{1}{4}\,z}{(1-z)\left(1-\frac{3}{4}\,z\right)} \\ \frac{0}{(1-z)\left(1-\frac{3}{4}\,z\right)} & \frac{1-\frac{3}{4}\,z}{(1-z)\left(1-\frac{3}{4}\,z\right)} \end{pmatrix}$$

```
Apart[(1 - z)/((1 - z) (1 - 3/4 z))]
Apart[(1/4 z)/((1 - z) (1 - 3/4 z))]
Apart[(1 - 3/4 z)/((1 - z) (1 - 3/4 z))]
```

$$-\frac{4}{-4+3\,z}$$

$$-\frac{1}{-1+z} + \frac{4}{-4+3\,z}$$

$$-\frac{1}{-1+z}$$

$$(\mathbf{I} - z\,\mathbf{P})^{-1} = \frac{1}{1-z}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{1-\frac{3}{4}\,z}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Folglich ist

$$\mathbf{H}(n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \left(\frac{3}{4}\right)^n \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Ist das System zu Beginn im Zustand 1, d.h.

$\boldsymbol{\pi}(0) = (1,\ 0)$,

dann finden wir also

$\pi_1(n) = \left(\frac{3}{4}\right)^n$ und $\pi_2(n) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

2. Wenn dagegen Zustand 2 der Anfangszustand ist, sodass

$\boldsymbol{\pi}(0) = (0,\ 1)$,

dann ist natürlich

$\pi_1(n) = 0$ und $\pi_2(n) = 1$.

In jedem Fall ist, wie wir sehen, die Grenzwahrscheinlichkeit für den Zustand 1 gleich Null, womit sich unsere Behauptung bestätigt, dass der Zustand 1 transient ist. Selbsverständlich hätten wir die Grenzwahrscheinlichkeiten auch mit Hilfe der Gleichungen aud dem Satz 1.2.5

$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\, \mathbf{P}$ und $\sum_{i \in E} \pi_i = 1$

berechnen können, wie wir das früher ausgeführt haben.

Ein System muss nicht unbedingt von einem transienten Zustantd in einen absorbierenden Zustand übergehen. Vielmehr kann das System in einen Zustand übergehen, der einer Klasse von Zuständen mit folgendem Charakteristikum angehört: Von jedem Zustand der Klasse aus ist jeder andere der Klasse erreichbar (eventuell erst nach mehreren Übergängen). Es ist jedoch unmöglich, von einem Zustand ddieser Klasse in einen Zustand zu gelangen, der nicht zu derselben Klasse gehört.

1.7.4 Definition: Die geschlossene Menge der erreichbaren Zuständen nennt man eine ergodische Klasse der Markov-Kette.

1.7.5 Bemerkung: Jede Markov-Kette hat offenbar mindestens eine ergodische Klasse. Im Problem des Spielzeugfabrikanten hat die entsprechende Markov-Kette genau eine ergodische Klasse.

Hätte die Markov-Kette beispielweise zwei ergodischen Klassen, dann wäre bei einem Anfangszustand in der ersten Klasse die Summe der Grenzwahrscheinlichkeiten der Zustände, die zur ersten Klasse gehören, gleich Eins, da das System die erste Klasse, in der es von Anfang an war, nicht verlassen kann. Folglich wären die Grenzwahrscheinlichkeiten für die Zustände der zweiten Klasse alle gleich Null. Wäre das System umgekehrt zu Beginn in einem Zustand der zweiten Klasse, so käme es aus dieser Klasse nicht heraus, und die Summe der Grenzwahrscheinlichkeiten für die Zustände der zweiten Klasse wäre gleich Eins. Damit wären aber die Grenzwahrscheinlichkeiten abhängig vom Anfangszustand. Wir können also eine ergodische Klasse als eine Verallgemeinerung des absorbierenden Zustandes auffassen; denn wenn das System erst einmal hineingelangt, kommt es nie mehr heraus. Einen transienten Zustand können wir als einen Zustand betrachten, den das System annimmt, bevor es sich in einer der ergodischen Klassen verfängt.

1.7.6 Bemerkung: Die Möglichkeit mehrerer ergodischer Klassen zwingt uns, unsere Vorstellungen vom Stabilitätsanteil $\mathbf{S}$ von $\mathbf{H}(n)$ zu revidieren. Da die Grenzverteilung jetzt vom Anfangszustan abhängt, sind die Zeilen von $\mathbf{S}$ nicht mehr identisch. Vielmehr gibt die i-te Zeile die Grenzverteilung an unter der Bedingung, dass das System zu Beginn im Zustand i war. Die Bedeutung von $\mathbf{T}(n)$ bleibt unverändert.

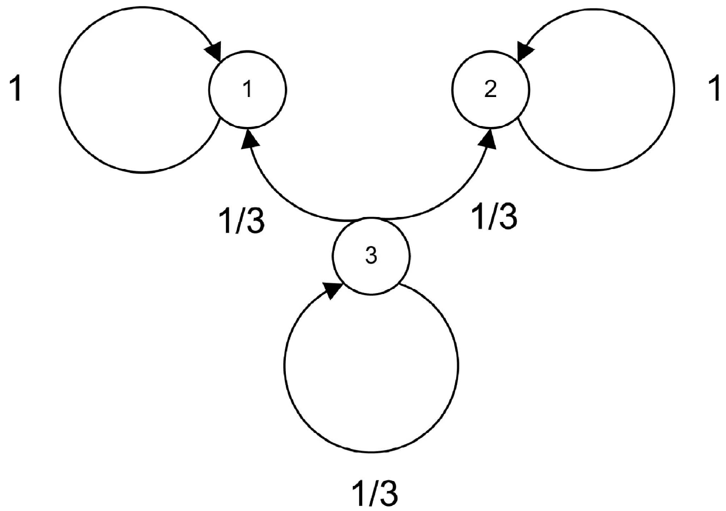
1.7.7 Beispiel: Markov-Kette mit drei Zuständen und zwei ergodischen Klassen.

▼

Lösung: Als Beispiel untersuchen wir einen einfachen Prozess mit drei Zuständen und zwei ergodischen Klassen,

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

Das Ablaufdiagramm kann man folgendermassen darstellen:



Zustand 1 bildet die eine ergodische Klasse, Zustand 2 die andere. Die beiden ergodischen Klassen reduzieren sich hier zu absorbierenden Zuständen, aber im Prinzip würde sich nichts ändern, wenn beide Klassen mehrere Zustände enthielten. Zustand 3, von dem aus das System in jede der beiden ergodischen Klassen übergehen kann, ist transient. Um H(n) zu ermitteln, gehen wir in der uns schon vertrauten Weise vor.

$$\mathbf{I} - z\,\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1-z & 0 & 0 \\ 0 & 1-z & 0 \\ -\frac{1}{3}\,z & -\frac{1}{3}\,z & 1-\frac{1}{3}\,z \end{pmatrix}$$

$$(\mathbf{I} - z\,\mathbf{P})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{(1-z)\left(1-\frac{1}{3}\,z\right)}{(1-z)^2\left(1-\frac{1}{3}\,z\right)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(1-z)\left(1-\frac{1}{3}\,z\right)}{(1-z)^2\left(1-\frac{1}{3}\,z\right)} & 0 \\ \frac{(1-z)\,\frac{1}{3}\,z}{(1-z)^2\left(1-\frac{1}{3}\,z\right)} & \frac{(1-z)\,\frac{1}{3}\,z}{(1-z)^2\left(1-\frac{1}{3}\,z\right)} & \frac{(1-z)^2}{(1-z)^2\left(1-\frac{1}{3}\,z\right)} \end{pmatrix}$$

```
Apart[(1 - z) (1 - 1/3 z) / ((1 - z)^2 (1 - 1/3 z))]
Apart[(1 - z) (1 - 1/3 z) / ((1 - z)^2 (1 - 1/3 z))]
Apart[(1 - z) 1/3 z / ((1 - z)^2 (1 - 1/3 z))]
Apart[(1 - z) 1/3 z / ((1 - z)^2 (1 - 1/3 z))]
Apart[(1 - z)^2 / ((1 - z)^2 (1 - 1/3 z))]
```

$$-\frac{1}{-1+z}$$

$$-\frac{1}{-1+z}$$

$$\frac{3}{2\,(-3+z)}-\frac{1}{2\,(-1+z)}$$

$$\frac{3}{2\,(-3+z)}-\frac{1}{2\,(-1+z)}$$

$$-\frac{3}{-3+z}$$

$$(\mathbf{I}-z\,\mathbf{P})^{-1}=\frac{1}{1-z}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}+\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{H}(n)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\end{pmatrix}+\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&1\end{pmatrix}=\mathbf{S}+\mathbf{T}(n).$$

1. Wenn das System zu Beginn im Zustand 1 ist, ergibt sich daraus

$$\pi_1(n)=1,\;\; \pi_2(n)=\pi_3(n)=0.$$

2. Ist das System am Anfang im Zustand 2, dann finden wir

$$\pi_1(n)=\pi_2(n)=\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right),\;\; \pi_3=\left(\frac{1}{3}\right)^{n}.$$

Zusammenfassend können wir sagen, dass das System, wenn es zu Beginn im Zustand 1 oder 2 ist, für immer in seinem Anfangszustand bleibt, während es vom Anfangszustand 3 aus nach vielen Übergängen mit Wahrscheinlichkeit von je annähernd $\frac{1}{2}$ in die Zustände 1 und 2 gelangt. Diese Aussagen kann man unmittelbar von den Zeilen von **S** ablesen, die die Grenzverteilungen in Abhängigkeit vom Anfangszustand darstellen.

<u>1.7.8 Definition:</u> Wenn zuerst die Zustände jeder ergodischen Klasse und dann transiente (nicht rekurrente) Zustände der Markov-Kette durchnumeriert werden, dann heißt die Übergangsmatrix **P** ***kanonisch***, nähmlich

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{P}_1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ 0 & \mathbf{P}_2 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & \mathbf{P}_L & 0 \\ \mathbf{R}_1 & \mathbf{R}_2 & ... & \mathbf{R}_L & \mathbf{Q} \end{pmatrix},$$

L – die Anzahl der ergodischen Klassen

Q –bezeichnet die Übegangsmatrix für die nicht rekurrenten Zuständen;

$\mathbf{R}_i$ –die Übegangsmatrix für die Übergänge von der Klasse der nicht rekurrenten Zustände in i – te ergodische Klasse;

$\mathbf{P}_i$ –die Übergangsmatrix innerhalb der i – ten ergodischen Klasse.

Für das Beispiel 1.7.7 erhalten wir

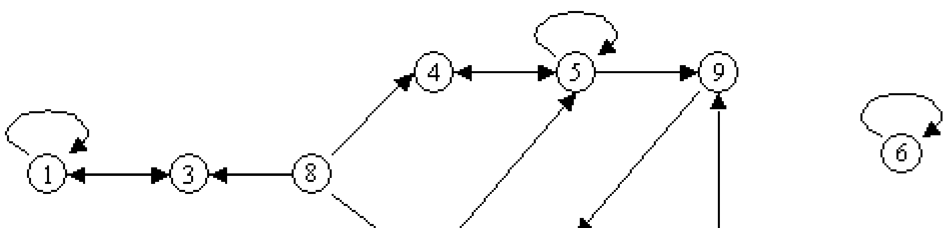
$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & 0 \\ \mathbf{R} & \mathbf{Q} \end{pmatrix}, \text{ wobei } \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \mathbf{R} = (\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2), \mathbf{R}_1 = 1/3, \mathbf{R}_2 = 1/3 \text{ und } \mathbf{Q} = 1/3.$$

1.7.9 Beispiel: Sei $\{X(n)\}_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Markov-Kette mit dem Zustandsraum $E = \{1, ..., 10\}$ und Übergangsmatrix

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Ordnen Sie die Zustände gemäß ihren ergodischen Klassen (Klassifikation) um. Bilden Sie ferner einen Übergangsgraphen.

Lösung:



{1,3},{2,7,9} und {6} - geschlossene irreduzible Menge

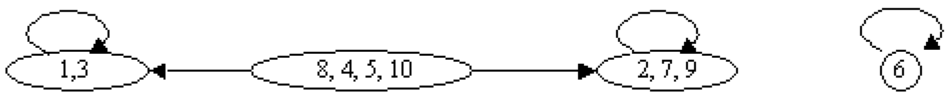
1) Der Zustand 6 heißt ***absorbierend***, weil $p_{66}(n) = 1$. Diese Zustand ist ebenfalls positiv rekurrent.

2) Die Zustände 4,5,8,10 sind ***transient***, weil $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} f_{i\,i}(n) < 1}$ wenn i={4,5,8,10},

$f_{i\,i}^{(n)}$die Wahrscheinlichkeit, nach genau n Schritten zum ersten Mal wieder in den Zustand i zurückzukehren..

Die Wahrscheinlichkeit der Rückkehr zu diesen Zustände ist kein sicheres Ereignis.

3) Die Zustände {1,3}, {2,7,9}, {6} sind ***positiv rekurrent*** (wenn die mittlere Rückkehrzeit $m_{i\,i}=\sum_{n=1}^{\infty} n\, f_{i\,i}(n)<\infty$ endlich ist) und ***aperiodisch***.



$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{P}_1 = 1,\ \mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{P}_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{R}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Die Markov-Kette mit mehreren ergodischen Klassen kann also leicht mit Hilfe der z-Transformation behandelt werden. Es gibt jedoch einen anderen typischen Fall, den wir betrachten müssen, damit unser Wissen um Markov-Kette vollständig wird, und zwar den Fall periodischer Markov-Ketten.

1.7.10 Definition: Der Zustand einer ergodischen Klasse einer Markov-Kette mit diskreter Zeit heißt periodish mit Periode $d_i > 1$, falls aufeinanderfolgende Rückkünfte nach i nur an Vielfachen von d_i (d_i maximal) möglich sind, d.h. falls $d_i$die größte natürliche Zahl ist, so daß $p_{i\,i}^{(n)} = 0$ für alle nicht durch d_i teilbaren Zahlen n gilt. Gibt es kein solches $d_i > 1$, so heißt i aperiodisch, d.h.

es gilt damit

$$d_i = \text{ggT}\left\{n : p_{i\,i}^{(n)} > 1\right\} = 1,$$

wobei $p_{i\,i}^{(n)}$ die Wahrscheinlichkeit, dass die Markov-Kette, die in i startet nach n Schritten das erste Mal wieder in den Zustand i gelangen.

1.7.11 Definition: Eine Markov-Kette mit periodischen Zuständen heißt periodisch.

Eine periodische Kette hat folgende Eigenschaft: Wenn sich das System zu Begin in einem Zustand $i \in E$ der Klasse befindet, dann kann es höchstens nach d_i, $2\,d_i$, $3\,d_i$, $4\,d_i$, ... Übergängen wieder mit positiver Wahrscheinlichkeit in diesen Zustand gelangen. Bei $d_i = 1$ für alle $i \in E$ heißt die Markov-Kette aperiodisch.

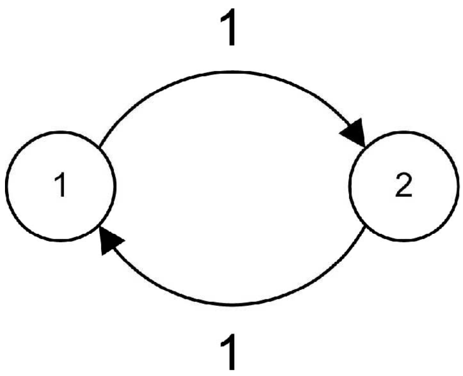
1.7.12 Beispiel: Periodische Markov-Kette.

▼

Lösung: Das einfachste periodische Markov-Kette ist diejenige mit zwei Zuständen und der Periode $d_i = 2$, dem die Übergangsmatrix

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und das Ablaufdiagram



entsprechen.

Wenn das System zu Beginn im Zustand 1 ist, wird es (fast sicher, d.h. mit Wahrscheinlichkeit 1) nach jeder geraden Anzahl von Übergängen wieder im Zustand 1 sein, während es nach jeder ungeraden Anzahl von Übergängen in den Zustand 2 gelangt. An und für sich sind wir über diesen Prozess nun vollständig im Bilde. Trotzdem wollen wir ihn auch noch mit der Transformationsmethode untersuchen. Es ergibt sich

$$\mathbf{I} - z\,\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & -z \\ -z & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$(\mathbf{I} - z\,\mathbf{P})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{(1-z)(1+z)} & \frac{z}{(1-z)(1+z)} \\ \frac{z}{(1-z)(1+z)} & \frac{1}{(1-z)(1+z)} \end{pmatrix}$$

```
Apart[1/((1 - z) (1 + z))]
Apart[z/((1 - z) (1 + z))]
```

$$-\frac{1}{2\,(-1+z)} + \frac{1}{2\,(1+z)}$$

$$-\frac{1}{2\,(-1+z)} - \frac{1}{2\,(1+z)}$$

$$(\mathbf{I} - z\,\mathbf{P})^{-1} = \frac{1}{1-z}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + \frac{1}{1+z}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$\mathbf{H}(n) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} + (-1)^n \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix H(n) stellt sicher die Lösung des Problems dar.

Wenn z.B. der Anfangszustand 1 ist, dann

$$\pi_1(n) = \frac{1}{2}\,(1 + (-1)^n) \text{ und } \pi_2(n) = \frac{1}{2}\,(1 - (-1)^n),$$

was mit unseren bereits vorher gewonnenen Resultaten vollkommen übereinstimmt. Wie sollen wir jedoch **S** und $\mathbf{T}(n)$ in diesem Beispiel interpretieren? Die Elemente von $\mathbf{T}(n)$ streben hier mit wachsendem n nicht gegen Null, sondern oszillieren unbegrenzt. Trotzdem können wir die Elemente von $\mathbf{T}(n)$ immer noch als Störungen der durch **S** definierten Grenzwahrscheinlichkeiten ansehen. Die Elemente von **S** können wir am besten als Wahrscheinlichkeiten dafür, dass das System zu einem zufällig herausgegriffenen Zeitpunkt in einem seiner Zustände ist, interpretieren.

Für periodische Markov-Kette ist der ursprüngliche Begriff der Grenzverteilung nicht brauchbar, denn eine Grenzverteilung im eigentlichen Sinne existiert offensichtlich nicht. In vielen praktischen Fällen ist jedoch die oben angegebene Interpretation über den zufällig gewählten Zeitpunkt sinnvoll und nützlich. Immer, wenn wir von Grenzverteilungen periodischer Kette sprechen, tun wir es in diesem Sinne, Nebenbei sei darauf hingewiesen, dass für unser Beispiel die Gleichungen

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi}\,\mathbf{P} \text{ und } \sum_{i\in E} \pi_i = 1$$

die Lösung $\pi_1 = \frac{1}{2}$, $\pi_2 = \frac{1}{2}$ haben.

Das folgende Kapitel beginnt mit der Analyse von Markov-Ketten, bei denen die Übergänge von einem Zustand zu einem anderen mit wirtschaftlichen Erlösen verbunden sind.