§2 Bewertete Markov-Kette

In diesem Kapitel analysieren wir die Markov-Ketten, bei denen die Übergänge von einem Zustand zu einem anderen mit wirtschaftlichen Erlösen verbunden sind.

2.1 Bewertete Markov-Kette. Angaben

Gegeben ist eine Markov-Kette mit diskreter Zeit $\{X(n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ und dem Zustandsraum $E=\{1,\ 2,\ \ldots,\ N\}$, wobei $|E|=N$ – die Anzahl der Zuständen ist. Nehmen wir einmal an, dass ein Übergang vom Zustand $i\in E$ zum Zustand $j\in E$ einen Erlös von $c_{i\,j}$ Währungseinheiten einbringt.

2.1.1 Definition: Wir nennen $c_{i\,j}$ die Bewertung des Übergangs von $i\in E$ nach $j\in E$. Die Gesamtheit der Werte $c_{i\,j}$ fassen wir in einer

Bewertungsmatrix **C** zusammen.

Die Bewertung muss nicht unbedingt in Geldeinheiten bestehen, vielmehr können ihr auch Spannungswerte, Produktionsgrössen oder irgendwelche andere mit dem Problem zusammenhängende physikalische Grössen zugrundeliegen. In dieser Vorlesung werden wir jedoch sehen, dass meistens wirtschaftliche Grössen, wie z.B. Geldeinheiten, die angemessene Interpretation der Bewertung darstellen.

2.1.2 Definition: Die bewertete Markov-Kette erzeugt während seiner Ablauf eine folge von Erlösen, die von den realisierten Übergängen abhängt. Folglich ist der Erlöse eine Zufallsvariable, deren Verteilung durch die daten der Markov-Kette bestimmt ist.

2.2 Lösung durch Rekursivansatz

Eine Frage, die sich für die bewertete Markov-Kette stellt, lautet: Wie gross ist der erwartete Gewinn der Markov-Kette für die nächsten $n\in\mathbb{N}_0$ Zeiteinheiten, wenn die Markov-Kette jetzt im Zustand $i\in E$ ist. Um diese Frage zu beantwirten, definieren wir die nächte Grösse.

2.2.1 Definition: Definieren wir die Grösse $\mathrm{v}_i(n)\geq 0,\ i\in E$, als den erwarteten Erlös für die nächsten $n\in\mathbb{N}_0$ Übergänge, wenn sich das System jetzt im Zustand $i\in E$ befindet.

Auf Grund dieser Definition finden wir sofort die folgende rekursive Beziehung.

2.2.2 Satz: Für die erwartete Erlöse $\mathrm{v}_i(n)$ gild die rekursive Beziehung

$$\mathrm{v}_i(n)=\sum_{j=1}^{N} p_{i\,j}(c_{i\,j}+\mathrm{v}_j(n-1)),\ \ i\in E,\ n\in\mathbb{N}.$$

▼

Beweis: Wenn das System von $i\in E$ nach $j\in E$ übergeht, dann ist damit ein Erlös $c_{i\,j}$ verbunden. Hinzu kommt der erwartete Erlös für die verbleibende, um 1 reduzierte Anzahl von Übergängen mit dem Anfangszustand $j\in E$.

Wie die Gleichung aus dem Satz 2.2.2 zeigt, muss man nun noch das mit den Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{i\,j}$ gewichtete Mittel dieser Erlöse bilden, um den gesuchten Erwartungswert des totalen Erlöses zu erhalten (nach dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit).

Schreiben wir die Gleichung aus dem Satz 2.2.2 in der Form

$$\mathrm{v}_i(n) = \sum_{j=1}^{N} p_{i\,j}\, c_{i\,j} + \sum_{j=1}^{N} p_{i\,j}\, \mathrm{v}_j(n-1),\ \ i \in E,\ n \in \mathbb{N}$$

und definiert man q_i gemäss

(i) $\quad q_i = \sum_{j=1}^{N} p_{i\,j}\, c_{i\,j},\ \ i \in E,$

dann geht die Gleichung über in

(ii) $\quad \mathrm{v}_i(n) = q_i + \sum_{j=1}^{N} p_{i\,j}\, \mathrm{v}_j(n-1),\ \ i \in E,\ \ n \in \mathbb{N}.$

Die Grösse q_i kann man also als den im nächsten Übergang von $i \in E$ aus erwarteten Erlös interpretieren.

2.2.3 Definition: Wir bezeichnen q_i als den erwarteten unmittelbaren Erlös für den Zustand $i \in E$.

Die Umformung von Gleichung aus dem Satz 2.2.2 in Gleichung $\mathrm{v}_i(n) = q_i + \sum_{j=1}^{N} p_{i\,j}\, \mathrm{v}_j(n-1)$ zeigt, dass wir die Matrix $\mathbf{C}$ gar nicht explizit brauchen, um den erwarteten Erlös des Systems zu bestimmen. Es genügt vielmehr, die Matrix $\mathbf{P} = \left[p_{i\,j}\right]_{i,\,j \in E}$ und den Spaltenvektor $\mathbf{q} = (q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_N)'$ mit den N Komponenten q_i zu kennen.

Diese Verringerung der benötigten Datenmenge ist bei der Lösung grosser Probleme auf Digitalrechenanlagen von Bedeutung.

2.2.4 Bemerkung: Gleichung (ii) können wir auch vektoriell schreiben als

(iii) $\quad \mathbf{v}(n) = \mathbf{q} + \mathbf{P}\, \mathbf{v}(n-1),\ \ n \in \mathbb{N}.$

Dabei ist $\mathbf{v}(n) = (\mathrm{v}_1(n),\ \mathrm{v}_2(n),\ \ldots,\ \mathrm{v}_N(n))'$ ein Spaltenvektor mit den N Komponenten $\mathrm{v}_i(n),\ i \in E$ und $\mathbf{q} = (q_1,\ q_2,\ \ldots,\ q_N)'$ ein Spaltenvektor mir den N Komponenten $q_i,\ \ i \in E$.

2.2.5 Satz: Für den Vektor $\mathbf{v}(n)$ durch rekursive Substitution gilt die Beziehung

$$\mathbf{v}(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{P}^i\, \mathbf{q} + \mathbf{P}^n\, \mathbf{v}(0),\ \ n \in \mathbb{N}.$$

▼

Beweis: Mit vollschtändiger Induktion.

2.3 Das Beispiel des Spielzeugfabrikanten

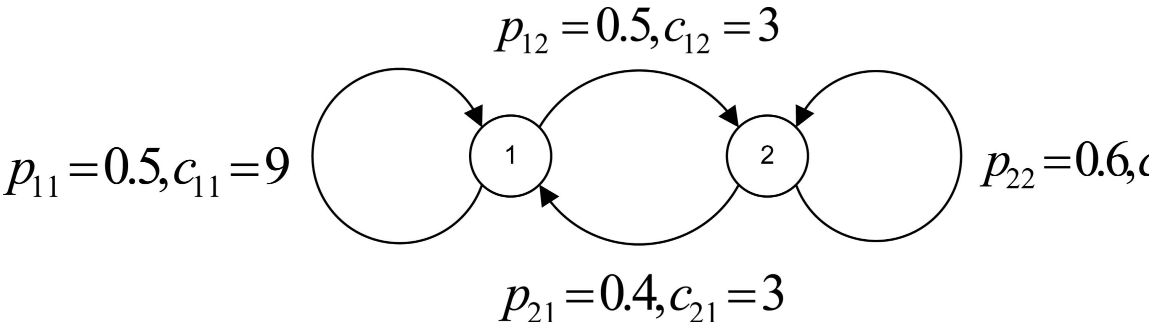
Um das Problem der erwarteten Erlöse besser zu durchleuchten, wollen wir dem Problem des Speilzeugfabrikanten noch eine Erlösstruktur hinzufügen.

Nehmen wir an, dass der Fabrikant, wenn er in der laufenden un in der folgenden Woche erfolgreich ist (das System geht also vom Zustand 1 in den Zustand 1 über) , in dieser Woche 9 Einheiten (z.B. 900) verdient. Also ist $c_{11} = 9$.

Geht er in dieser Woche von dem erfolglosen in den erfolglosen Zustand 2 über, dann verliert er 7 Einheiten, d.h.

$c_{22} = -7$.

Findet in dieser Woche ein Wechsel vom erfolgreichen in den erfolglosen Zustand statt oder umgekehrt, dann soll der Gewinn jeweils 3 Einheiten betragen, so dass $c_{12} = c_{21} = 3$.



Folglich haben wir die Bewertungsmatrix

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 9 & 3 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}.$$

Ausserdem hatten wir

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 \end{pmatrix}.$$

Daraus ergibt sich nach Gleichung (i) $q_i = \sum_{j=1}^{N} p_{i\,j}\, c_{i\,j}, \ i \in E$,

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} p_{11}\, c_{11} + p_{12}\, c_{12} \\ p_{21}\, c_{21} + p_{22}\, c_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5 \cdot 9 + 0.5 \cdot 3 \\ 0.4 \cdot 3 - 0.6 \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Der Vektor **q** sagt uns, dass der Fabrikant, wenn er gerade ein beliebtes Spielzeug herstellt, in der folgenden Woche einen Gewinn von 6 Einheiten erwartet, während er andernfalls mit einem erwarteten Verlust von 3 Einheiten rechnen muss.

Nehmen wir an, der Fabrikant beabsichtige, seinen Betrieb nach n Wochen aufzugeben. Er möchte gerne den erwarteten Betrag kennen, den er in Anbhängigkeit davon, ob er jetzt gerade erfolgreich ist oder nicht, gewinnen oder verlieren kann. Dazu kann man die Relationen

$$\mathrm{v}_i(n) = q_i + \sum_{j=1}^{N} p_{i\,j}\, \mathrm{v}_j(n-1), \ i \in E, \ n \in \mathbb{N}$$

oder

$$\mathbf{v}(n) = \mathbf{q} + \mathbf{P}\,\mathbf{v}(n-1), \ n \in \mathbb{N}$$

benutzen, wenn man zuvor die Randwerte $v_i(0)$ festgesetzt hat. Diese Grössen stellen den erwarteten Ertrag dar, den der Fabrikant an dem Tag erhält, da er den Betrieb aufgibt.

Wird das Geschäft an einen anderen Unternehmer verkauft, dann ist

$\mathrm{v}_1(0)$ – der Verkaufspreis, wenn am Verkaufstag ein erfolgreiches Spielzeug produziert wird, während

$\mathrm{v}_2(0)$ – der Verkaufspreis ist, wenn die Firma am Verkaufstag in einer weniger günstigen Situation ist.

Wir setzen in unserem Beispiel der Einfachheit halber die Grenzwerte $\mathrm{v}_i(0)$, $i \in E$, gleich Null.

Mit Hilfe der Gleichung (iii)

$$\mathbf{v}(n) = \mathbf{q} + \mathbf{P}\,\mathbf{v}(n-1), \ n \in \mathbb{N}$$

erstellen wir nun die Tabelle, aus der für jeden Zustand und einige Werte von n die Grössen $\mathrm{v}_i(n)$, $i \in E$, ersichtlich sind.

```
Cm = {{9, 3}, {3, -7}};
Pm = {{0.5, 0.5}, {0.4, 0.6}};
q = {Sum[Pm[[1]][[j]] Cm[[1]][[j]], {j, 1, 2}],
   Sum[Pm[[2]][[j]] Cm[[2]][[j]], {j, 1, 2}]};
v[0] = {0, 0};
v[n_] := q + Pm.v[n - 1] /; n ≥ 1;
tb = Table[{n, v[n][[1]], v[n][[2]], v[n][[1]] - v[n][[2]]}, {n, 0, 10}];
TableForm[tb, TableHeadings → {None, {"n", "v1(n)", "v2(n)", "v1(n)-v2(n)"}}] //
 N
```

n	$v_1(n)$	$v_2(n)$	$v_1(n)-v_2(n)$
0.	0.	0.	0.
1.	6.	-3.	9.
2.	7.5	-2.4	9.9
3.	8.55	-1.44	9.99
4.	9.555	-0.444	9.999
5.	10.5555	0.5556	9.9999
6.	11.5556	1.55556	9.99999
7.	12.5556	2.55556	10.
8.	13.5556	3.55556	10.
9.	14.5556	4.55556	10.
10.	15.5556	5.55556	10.

Vier Wochen vor der Geschäftsaufgabe erwartet der Fabrikant also einen Gewinn von 9.555 Einheiten für die verbleibende Zeit, wenn er jetzt ein beliebtes Spielzeug produziert, und einen Verlust von 0.444 im anderen Fall.

Anscheinend nähert sich

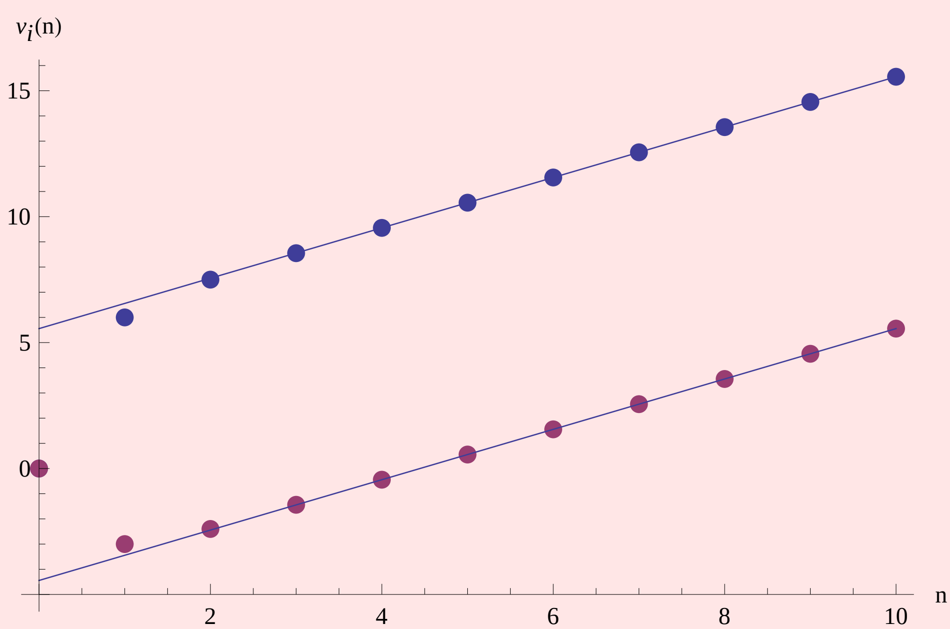
$$v_1(n) - v_2(n) \approx 10,\ n \to \infty$$

mit wachsendem n dem Wert 10, während

$$v_1(n) - v_1(n-1) \approx 1 \text{ und } v_2(n) - v_2(n-1) \approx 1,\ n \to \infty$$

beide mit wachsendem n gegen 1 zu streben scheinen.

```
lp = ListPlot[{Table[{n, v[n][[1]]}, {n, 0, 10}], Table[{n, v[n][[2]]}, {n, 0, 10}]},
   AxesOrigin → {0, -5}, PlotStyle → PointSize[0.02], AxesLabel → {"n", "vi(n)"}];
p1 = Plot[x + 5.5556, {x, 0, 10}];
p2 = Plot[x - 4.4444, {x, 0, 10}];
Show[lp, p1, p2]
```



Mit anderen Worten scheint es, was den zukünftigen Gewinn angeht, für grosses n um 10 Einheiten wertvoller zu sein, zu Beginn ein erfolgreiches Spielzeug zu haben. Ausserdem bringt bei grossem n eine weitere Produktionswoche einen durchschnittlichen Gewinn von ungefähr einer Einheit.

Das Verhalten von $\mathrm{v}_i(n)$, $i \in E$, wird noch übersichtlicher, wenn man die Daten der Tabelle aufzeichnen wie in Figur. Die Distanz zwischen die beiden Asymptoten hat die Steigung 1.

Das asymptotische Verhalten der Funktionen, deren Werte die totalen erwarteten Erlöse sind, wird uns noch sehr interessieren.

2.4 Untersuchung bewertete Markov-Kette mit Hilfe der z-Transformation

Wir wollen nun den bewertete Markov-Kette mittels z-Transformation untersuchen.

Die z-Transformation des Vektors $\mathbf{v}(n) = (\mathrm{v}_1(n), \mathrm{v}_2(n) \ldots, \mathrm{v}_N(n))'$ bezeichnen wir mit $\boldsymbol{v}(z) = (v_1(z), v_2(z), \ \ldots, v_N(z))'$, sodass also

$$v_i(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{v}_i(n)\, z^n, \ \ i \in E$$

gilt oder in Vekorform

$$\boldsymbol{v}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{v}(n)\, z^n.$$

2.4.1 Satz: Für die z-Transfomierte $\boldsymbol{v}(z)$ des Vektors $\mathbf{v}(n)$ gilt

(iv) $\quad \boldsymbol{v}(z) = \frac{z}{1-z}\, (\mathbf{I} - z\,\mathbf{P})^{-1}\, \mathbf{q} + (\mathbf{I} - z\,\mathbf{P})^{-1}\, \mathbf{v}(0).$

Dabei ist **I** die Einheitsmatrix.

▼

Beweis:

Schreiben wir Gleichung (iii) als

$$\mathbf{v}(n+1) \ = \ \mathbf{q} \ + \ \mathbf{P}\,\mathbf{v}(n), \ \ n \in \mathbb{N}_0.$$

Transformieren wir diese Gleichung, so ergibt sich

$$z^{-1}(\boldsymbol{v}(z) - \mathbf{v}(0)) = \frac{1}{1-z}\, \mathbf{q} + \mathbf{P}\, \boldsymbol{v}(z)$$

$$\boldsymbol{v}(z) - \mathbf{v}(0) = \frac{z}{1-z}\, \mathbf{q} + z\,\mathbf{P}\, \boldsymbol{v}(z)$$

$$(\mathbf{I} - z\,\mathbf{P})\, \boldsymbol{v}(z) = \frac{z}{1-z}\, q + \mathbf{v}(0)$$

oder

$$\boldsymbol{v}(z) = \frac{z}{1-z}\, (\mathbf{I} - z\,\mathbf{P})^{-1}\, \mathbf{q} + (\mathbf{I} - z\,\mathbf{P})^{-1}\, \mathbf{v}(0).$$

Zur Berechnung der Transformierten $\boldsymbol{v}(z)$ brauchen wir also wieder die Inverse der Matrix $\mathbf{I} - z\,\mathbf{P}$, die bereits bei der Transformation der Zustandswahsrcheinlichkeiten vorkam. Das ist allerdings nicht erstaunlich, da die Bewertung die Verteilungsstruktur dee Prozesses nicht beeinflusst.

■ Wir behandeln nun das Problem des Spielzeugfabrikanten.

Im Beispiel des Spielzeugfabrikanten war $\mathbf{v}(0) = (0, 0)'$ der Nullvektor, so dass sich die Gleichung (iv) zu

$$\boldsymbol{v}(z) = \frac{z}{1-z}\, (\mathbf{I} - z\,\mathbf{P})^{-1}\, \mathbf{q}$$

reduziert. Für $(\mathbf{I} - z\,\mathbf{P})^{-1}$ hatten wir früher

$$(\mathbf{I} - z\,\mathbf{P})^{-1} = \frac{1}{1-z}\begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix} + \frac{1}{1-\frac{1}{10}\,z}\begin{pmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{5}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

gefunden. Also ist

$$\frac{z}{1-z}\,(\mathbf{I} - z\,\mathbf{P})^{-1} = \frac{z}{(1-z)^2}\begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix} + \frac{z}{(1-z)\left(1-\frac{1}{10}\,z\right)}\begin{pmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{5}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{z}{(1-z)^2}\begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix} + \left(\frac{\frac{10}{9}}{1-z} + \frac{-\frac{10}{9}}{1-\frac{1}{10}\,z}\right)\begin{pmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{5}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

Sei die Matrix $\mathbf{F}(n)$ das Urbild der Transformierten $\frac{z}{1-z}\,(\mathbf{I} - z\,\mathbf{P})^{-1}$.

Dann ist (siehe Tabelle für z-Transformierte, Abschnitt 1.3)

$$\mathbf{F}(n) = n\begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix} + \frac{10}{9}\left(1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n\right)\begin{pmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{5}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}.$$

Der Vektor $\mathbf{v}(n)$ der gesamten erwarteten Erlöse ist dann nach Gleichung (iv) gleich

$$\mathbf{v}(n) = \mathbf{F}(n)\,\mathbf{q},$$

also, da

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{v}(n) = \left(n\begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix} + \frac{10}{9}\left(1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n\right)\begin{pmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{5}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$= n\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{10}{9}\left(1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n\right)\begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$\mathrm{v}_1(n) = n + \frac{50}{9}\left(1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n\right) \text{ und } \mathrm{v}_2(n) = n - \frac{40}{9}\left(1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n\right).$$

Damit haben wir für jeden der beiden möglichen Anfangszuständen einen geschlossenen Ausdruck für den gesamten erwarteten Erlös.

Diese Gleichungen für $\mathrm{v}_1(n)$ und $\mathrm{v}_2(n)$ könnte man zur Aufstellung der Tabelle und für die graphische Darstellung Figure aus dem Abschnitt 2.3 benutzen.

Man sieht, dass $\mathrm{v}_1(n)$ mit wachsendem n gegen $n + \frac{50}{9}$ strebt, währed sich $\mathrm{v}_2(n)$ dem Wert $n - \frac{40}{9}$ nähert. Die asymptotischen Relationen

$$\mathrm{v}_1(n) = n + \frac{50}{9}$$

$$\mathrm{v}_2(n) = n - \frac{40}{9}$$

sind die Gleichungen der in Figure im Abschnitt 2.3 dargestellten Asymptoten.

Offenbar haben $\mathrm{v}_1(n)$ und $\mathrm{v}_2(n)$ für sehr grosses n die Steigung 1, und es wird $\mathrm{v}_1(n) - \mathrm{v}_2(n) = 10$, wie wir bereits vermuttet hatten.

Bei grossem n ist die Steigung von $\mathrm{v}_1(n)$ und $\mathrm{v}_2(n)$ der durchschnittliche Erlös pro Übergang oder hier pro

Woche,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{v_1(n)}{n} = 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{50}{9\,n} = 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{v_2(n)}{n} = 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{40}{9\,n} = 1.$$

Hätte der Spielzeugfabrikant vor, noch sehr lange zu produzieren, so würde er also pro Woche einen Erlös von einer Einheit erwarten.

2.4.2 Definition: Bezeichnen wir den durchschnittlichen Erlös pro Übergang, d.h.

$$g_i = \lim_{n\to\infty} \frac{v_i(n)}{n}, \quad i \in E,$$

als Gewinn des Anfangszustandes $i \in E$.

In diesem Fall haben wir also einen Gewinn von einer Einheit, d.h. $g_i = 1$ für alle $i \in E$.

2.5 Das asymptotische Verhalten

Was kann man nun im allgemeinen über die gesamten erwarteten Erlöse eines Prozesses von langer Dauer aussagen? Um diese Frage zu beantworten, befassen wir uns noch eingehender mit Gleichung (iv):

$$\boldsymbol{v}(z) = \frac{z}{1-z}\,(\mathbf{I} - z\,\mathbf{P})^{-1}\,\mathbf{q} + (\mathbf{I} - z\,\mathbf{P})^{-1}\,\mathbf{v}(0).$$

Im Satz 1.4.4 wurde berichtet, dass Urbild $\mathbf{H}(n)$ der Transformierten $(\mathbf{I} - z\,\mathbf{P})^{-1}$ die Form

$$\mathbf{H}(n) = \mathbf{S} + \mathbf{T}(n)$$

annimmt. Darin ist $\mathbf{S}$ eine stochastische Matrix, deren i-te Zeile identisch ist mit dem Vektor der Grenzwahrscheinlichkeiten $\boldsymbol{\pi} = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_N)$, wenn das System zu Begin in Zustand $i \in E$ ist, und $\mathbf{T}(n)$ ist eine Differential-Matrix oder eine Summe von Differential-Matrizen mit geometrisch abnehmenden Koeffizienten, wenn wir Periodizität ausschliessen.

2.5.1 Satz: Der Vektor $\mathbf{v}(n)$ für $n \to \infty$ strebt asymptotisch gegen

(v) $\quad \mathbf{v}(n) = n\,\mathbf{S}\,\mathbf{q} + \mathcal{T}(1)\,\mathbf{q} + \mathbf{S}\mathbf{v}(0),$

wobei $\mathcal{T}(z)$ eine z-Transformierte von $\mathbf{T}(n)$ ist.

Wenn man einen Vektor $\mathbf{g}$ mit den Komponenten g_i durch

$$\mathbf{g} = \boldsymbol{S}\,\boldsymbol{q}$$

definiert, dann folgt

(vi) $\quad \mathbf{v}(n) = n\,\mathbf{g} + \mathcal{T}(1)\,\mathbf{q} + \mathbf{S}\mathbf{v}(0).$

▼

Beweis:

Bezeichnen wir die z-Transformierte von $\mathbf{T}(n)$ mit $\mathcal{T}(z)$, so gilt also

$$(\mathbf{I} - z\,\mathbf{P})^{-1} = \frac{1}{1-z}\,\mathbf{S} + \mathcal{T}(z).$$

Setzen wir diese Gleichung in (iv) ein, so folgt

$$\boldsymbol{v}(z) = \frac{z}{(1-z)^2}\,\mathbf{S}\,\mathbf{q} + \frac{z}{1-z}\,\mathcal{T}(z)\,\mathbf{q} + \frac{1}{1-z}\,\mathbf{S}\mathbf{v}(0) + \mathcal{T}(z)\,\mathbf{v}(0).$$

Aus dieser Gleichung können wir auf die Komponenten von $\mathbf{v}(n)$ schliessen.

1. Der Ausdruck

$$\frac{z}{(1-z)^2}\,\mathbf{S\,q}$$

steht für eine Steigung der Grösse $\mathbf{S\,q}$.

2. Im weiteren folgt, dass

$$\frac{z}{1-z}\,\mathcal{T}(z)\,\mathbf{q}$$

einen konstanten, von n unabhängigen Anteil $\mathcal{T}(1)\,\mathbf{q}$ und im übrigen Anteile, die mit wachsendem n gegen Null streben, enthält.

Falls alle Nullstellen der Gleichung

$$\det(\mathbf{I} - z\,\mathbf{P}) = 0$$

analytisch sind, dann

$$\mathcal{T}(z) = \sum_i \frac{\mathbf{D}_i}{1-\alpha_i\,z},$$

wobei $\mathbf{D}_i -$ Differenzial-Matrix, die unabhängig von z ist, und α_i −Nullstellen, die kleiner 1 sind.

Dann erhält man mit der Parzialbruchzerlegung

$$\frac{z}{1-z}\,\mathcal{T}(z) = \frac{1}{1-z}\,\sum_i \frac{\mathbf{D}_i}{1-\alpha_i} - \sum_i \frac{\mathbf{D}_i/(1-\alpha_i)}{1-\alpha_i\,z}.$$

Das Urbild dieser Transformation ist gleich

$$\sum_i \frac{\mathbf{D}_i}{1-\alpha_i} - \sum_i \frac{\mathbf{D}_i}{1-\alpha_i}\,{\alpha_i}^n,$$

wobei $\sum_i \frac{\mathbf{D}_i}{1-\alpha_i} = \mathcal{T}(1)$.

3. Ebenso stellt

$$\frac{1}{1-z}\,\mathbf{Sv}(0)$$

den konstanten Anteil $\mathbf{Sv}(0)$ an $\mathbf{v}(n)$ dar.

4. Wie es im Punkt 3 gezeigt wurde, enspricht der Ausdruck

$$\mathcal{T}(z)\,\mathbf{v}(0)$$

die Komponenten, die mit wachsendem n verschwinden (sofern der Prozess aperiodisch ist).

2.5.2 Definition: Die Grösse g_i ist das mit den zum Anfangszustand $i \in E$ gehörigen Grenzwahrscheinlichkeiten gewichtete Mittel der erwarteten unmittelbaren Erlöse $q_j,\ j \in E$,

$$g_i = \sum_{j=1}^{N} s_{i\,j}\,q_j.$$

Sie ist zugleich auch bei vielen möglichen Übergängen der durchschnittliche Erlös, wenn das System zu Begin im Zustand $i \in E$ ist, oder der zum Zustand $i \in E$ gehörige Gewinn.

Ausserdem ist g_i, $i \in E$, die Steigung der Asymptote von $\mathrm{v}_i(n)$. Da alle Zustände, die zur gleichen ergodischen Klasse gehören, in der Matrix S identische Zeilen haben, ist ihnen allen der gleiche Gewinn zugeordnet. Wenn der Prozess nur eine ergodische Klasse enthält, die zudem noch aperiodisch ist, dann stimmen alle Zeilen von S mit der Grenzverteilung π der Markov-Kette überein. In diesem Fall bringen also alle Zustände den gleichen Gewinn g, wobei

2.5.3 Satz (Das ergodische Theorem für bewertete Markov-Kette): Für ergodische bewertete Markov-Kette mit diskreter Zeit und einer ergodischen Klasse gilt die Beziehung

$$g = \lim_{n\to\infty} \frac{v_i(n)}{n} = \sum_{j=1}^{N} \pi_i\, q_j$$

▼

Beweis: siehe Tijms (1995)

Der Spaltenvektor $\mathcal{T}(1)\,\mathbf{q} + \mathbf{Sv}(0)$ stellt die Werte der Asymptoten von $\mathbf{v}(n)$ für $n = 0$ dar, mit anderen Worten die Ordinatenabschnitte dieser Asymptoten. Diese Ordinatenabschnitte bestimmen sich also sowohl aus dem vorübergehenden Verhalten des Prozesses $\mathcal{T}(1)\,\mathbf{q}$ als auch den Randwerten $\mathbf{Sv}(0)$.

2.5.4 Definition: Wir bezeichnen die Ordinatenabschnitte der Asymptoten mit v_i, $i \in E$, d.h.

$$v_i = \mathcal{T}(1)\,\mathbf{q} + \mathbf{Sv}(0), \quad i \in E.$$

2.5.5 Satz: Für die Ordinatenabschnitte $v_i(n)$ mit $n \to \infty$ gilt

(vii) $\quad v_i(n) = n\, g_i + v_i,\ i \in E,\ n \in \mathbb{N}.$

Bezeichnen wir den Spaltenvektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_N)'$, dann ist

(viii) $\quad \mathbf{v}(n) = n\,\mathbf{g} + \mathbf{v}.$

▼

Beweis: Folgt unmittelbar aus (vi).

Diese Beziehung gilt nur für sehr grosses n.

2.5.6 Definition: Ist der Prozess ergodisch mit einer ergodischen Klasse, dann gilt bekanntlich

$$g_i = g$$

für alle $i \in E$. In diesem Fall nennen wir g den Gewinn des Prozesses anstatt den Gewinn eines Zustandes.

Die Gleichungen (vii) werden dann zu

$$v_i(n) = n\, g + v_i, \quad i \in E, \quad n \in \mathbb{N}.$$

■ Wir behandeln nun das Problem des Spielzeugfabrikanten.

Zur Illustration dieser Ergebnisse betrachten wir wieder unser Beispiel des Spielzeugfabrikanten.

Es ist

$$(\mathbf{I} - z\,\mathbf{P})^{-1} = \frac{1}{1-z}\begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix} + \frac{1}{1-\frac{1}{10}\,z}\begin{pmatrix} \frac{5}{9} & -\frac{5}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{4}{9} \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{1-z}\,\mathbf{S} + \boldsymbol{\mathcal{T}}(z)$$

$$\mathbf{S} = \begin{pmatrix} \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \\ \frac{4}{9} & \frac{5}{9} \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{\mathcal{T}}(1) = \begin{pmatrix} \frac{50}{81} & -\frac{50}{81} \\ -\frac{40}{81} & \frac{40}{81} \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}, \mathbf{g} = \mathbf{S}\,\mathbf{q} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Nach Voraussetzung war $\mathbf{v}(0) = 0$, sodass

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\mathcal{T}}(1)\,\mathbf{q} = \begin{pmatrix} \frac{50}{81} & -\frac{50}{81} \\ -\frac{40}{81} & \frac{40}{81} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{50}{9} \\ -\frac{40}{9} \end{pmatrix}$$

Nach (viii) ist dann

$$\mathrm{v}_1(n) = n + \frac{50}{9} \text{ und } \mathrm{v}_2(n) = n - \frac{40}{9}.$$

Man muss dabei beachten, dass diese Ergebnisse, die wir bereits früher erhalten haben, nur für grosse Werte von n anähernd richtig sind.

Wir haben nun die bewertete Markov-Kette untersucht, wobei wir besonders aufmerksamkeit das asymptotische Verhalten der gesamten erwarteten Erlöse betrachtet haben. Die Gründe dafür werden in den folgenden Kapiteln ersichtlich.