Markov-Ketten Übungen
WS 2016/17
3.Übungsblatt
Aufgaben für den 03.11.2016

1. Eine Bernoulli-Kette ist dadurch gekennzeichnet, dass die zeitlich aufeinanderfolgenden Zustände (0 oder 1), die treten mit Wahrscheinlichkeiten p und $1-p$ statistisch unabhngig sind.

   a) Zeigen Sie, dass die Bernoulli-Kette eine Markov-Kette ist.

   b) Bestimmen Sie die m-Schritt-Übergangswahrscheinlichkeiten dieser Kette.

2. Gegeben sei ein binärer Signalprozess mit den Zuständen $X(n) = 0$ oder $X(n) = 1$ als Beispiel einer zweiwertigen Markov-Kette mit dem Anfangsvektor $\boldsymbol{\pi}(0) = (\alpha, \beta)$ und den zeitunabhngigen symmetrischen Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{01} = p_{10} = p$ sowie $p_{00} = p_{11} = 1 - p$.

   a) Bestimmen Sie die Elemente der n-dchrittigen Übergangsmatrix P^n in geschlossener Form.

   b) Bestimmen Sie die Grenzverteilung der Markov-Kette $\{X(n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$.

3. Vier Server S_1, S_2, S_3 und S_4 schicken zueinander ein Datenpaket. Server S_1 und S_2 übertragen es dem anderen mit Wahsrcheinlichkeit $1/2$ und den Server S_3 und S_4 jeweils mit Wahrscheinlichkeit $1/4$. Die Server S_3 und S_4 senden es den Server S_1 und S_2 jeweils mit Wahsrcheinlichkeit $1/2$ und nie den Server S_3 und S_4. Wie oft bekommt jeder Server (auf Dauer gesehen) das Datenpaket.

4. Wir betrachten eine Markov-Kette $\{X(n)\}_{n\in\mathbb{N}_0}$ mit Zustandsraum $E = \{0, 1, ..., m\}$. In jedem Schritt kann der Zustand sich um 1 erhöhen, gleich bleiben oder um 1 fallen. Eine solche Markov-Kette nennt man **Geburts- und Todeskette**. Der momentane Zustand beschreibt dabei die Größe einer Population und zu jedem Zeitpunkt kann entweder jemand sterben oder jemand wird geboren oder es passiert nichts. Wir bezeichnen mit p_k die Wahrscheinlichkeit einer Geburt im Zustand k, mit q_k die Wahrscheinlichkeit eines Todesfalls und mit $r_k = 1 - p_k - q_k$ die Wahrscheinlichkeit, dass weder jemand geboren wird noch jemand stirbt. Es soll gelten $q_0 = p_m = 0$.

   a) Bestimmen Sie die Grenzverteilung der Geburts- und Todeskette.

   b) Bestimmen Sie die Grenzverteilung der Geburts- und Todeskette mit $p_k = p, k = 0, 1, \ldots, m-1$ und $q_k = q, k = 1, 2, \ldots, m$.

   b) Stellen Sie fest, unter welchen Voraussetzungen die Kette a) bzw b) ergodisch ist.

5. Bestimmen Sie den Zustandswahrscheinlichkeitsvektor $\boldsymbol{\pi}(n)$ aus der Aufgabe 2 des Übungsblattes 2 mit Hilfe der z-Transformation.

6. In Bamberg sind an einem Tag drei Wetterlagen möglich: Regen (0), schöner Tag (1), Schnee (2). Es gibt niemals zwei aufeinanderfolgende schöne Tage. Modelliert mit einer Markov-Kette erhält man folgende Übergangsmatrix:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

   Wieviele Tage dauert es im Mittel bis zum ersten Regentag? (von einem beliebigen Starttag aus).

7. Sei n_{ij} die mittlere Anzahl von Besuchen im transienten Zustand $j \in E$, bevor die Markov-Kette in den absorbierenden Zustand übergeht, wenn im Zustand $i \in E$ gestartet wurde. Sei T die Menge der transienten Zustände. Dann gilt

$$n_{ij} = \delta_{ij} + \sum_{k \in T} p_{ik} n_{kj},$$

   wobei δ_{ij} - das Kronecker-Delta ist. In Matrixschreibweise

$$N = I + QN,$$

   wobei Q die Übergänge zwischen transienten Zustände beschreibt. Daraus folgt

$$N = (I - Q)^{-1}$$

   und Matrix N heißt **Fundamentalmatrix** der absorbierenden Markov-Kette.

   Sei τ_i die mittlere Anzahl von Schritten bis zur Absorption, wenn im Zustand i gestartet wurde. Es gilt

$$\tau_i = \sum_{j \in T} n_{ij}.$$

   Gegeben ist das Wetter-Modell aus der Aufgabe 5 aber mit dem absorbierenden Zustand 0, d.h.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

   Wieviele Tage dauert es im Mittel bis zum ersten Regentag, wenn von einem schönen Tag bzw. von Schnee ausgegangen wurde.

8. Gegeben sei die homogene Markov-Ketter $\{X(t)\}_{t \in \mathbb{N}_0}$ mit Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

   Bestimmen Sie die Zustandswahrscheinlichkeiten $\boldsymbol{\pi}(n)$ in expliziter Form mit Hilfe der z-Transformation.