§2 Zufallsexperimente

Nachdem wir uns spielerisch mit dem Phänomen "Zufall" beschäftigt und den Begriff "Zufallsexperiment" bereits intuitiv erfasst haben, wollen wir in diesem Kapitel den Begriff "Zufallsexperiment" exakt definieren und lernen, wie Zufallsexperimente mathematisch beschrieben werden können.

2.1 Der Begriff Zufallsexperiment

Mit dem Würfeln, dem Münzwurf und dem Ziehen von Kugeln aus einer Urne haben wir unsere erste Bekanntschaft mit Zufallsexperimenten gemacht. Wir wollen nun diesen Begriff genauer definieren:

> **2.1.1 Definition:** Unter einem Zufallsexperiment versteht man einen in der realen Welt ablaufenden Vorgang, bei dem ein nicht vollständig vorhersehbarer Ausgang (Realisierung) aus einer Menge von möglichen Ausgängen realisiert wird.

Einfache Beispiele für diesen zentralen Begriff, sind

- das n-malige Werfen von k Würfeln;
- das n-malige Werfen von k Münzen;
- das Ziehen mit Zurücklegen von k Kugeln aus einer Urne mit n Kugeln;
- die Ziehen ohne Zurücklegen von k Kugeln aus einer Urne mit $n \geq k$ Kugeln.

Soll ein Zufallsexperiment näher untersucht werden, so muss zuerst geklärt werden, was man als dessen mögliche Ausgänge ansieht:

Beim einmaligen Werfen einer Münze werden dies die beiden Ausgänge "Zahl" und "Adler" sein. Besteht das Zufallsexperiment jedoch im Ziehen einer Kugel aus einer Urne mit fünf roten und drei schwarzen Kugeln, so ist schon nicht mehr so offensichtlich, was man unter einem möglichen Ausgang versteht. Es ist zwar naheliegend, die beiden Realisierungen "eine rote Kugel wurde gezogen" und "eine schwarze Kugel wurde gezogen" als die beiden möglichen Ausgänge anzusehen. Es wäre aber auch denkbar, die acht Kugeln vor der Ziehung zu nummerieren (etwa die roten Kugeln mit den Nummern 1, 2, 3, 4, 5 und die schwarzen Kugeln mit den Nummern 6, 7, 8) und dann von den acht möglichen Ausgängen "die Kugel mit der Nummer 1 wurde gezogen", …, "die Kugel mit der Nummer 8 wurde gezogen" zu reden.

Sobald geklärt ist, was man als mögliche Ausgänge eines Zufallsexperiments ansieht, ordnet man jedem dieser Ausgänge in bijektiver Weise ein Element ω einer Menge Ω mit einer leicht zu überschauenden Struktur zu und unterscheidet in Zukunft nicht mehr zwischen dem Ausgang und dem diesem Ausgang zugeordneten Element $\omega \in \Omega$.

> **2.1.2 Definition:** Die Menge Ω nennt man den Ereignisraum des Zufallsexperiments. Teilmengen $A, B, \ldots$ von Ω nennt man Ereignisse. Einelementige Teilmengen $\{\omega\}$ von Ω nennt man Elementarereignisse. Man sagt "das Ereignis A tritt ein", wenn ein Ausgang ω aus der Menge A realisiert wird.

Das Auffinden eines geeigneten Ereignisraums stellt einen (wichtigen und keineswegs trivialen) ersten Schritt bei der Erstellung des mathematischen Modells eines Zufallsexperiments dar. Wir wollen diesen Vorgang an Hand von Beispielen erläutern:

2.1.3 Beispiel: Das Zufallsexperiment besteht im n-maligen Werfen eines Würfels.
- Man gebe einen passenden Ereignisraum Ω für dieses Zufallsexperiment an.
- Man beschreibe das Ereignis "es wird die Augensumme s gewürfelt" als Teilmenge von Ω.

▼

Lösung: Als Ereignisraum bietet sich die Menge

$$\Omega = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$$

an. Die Liste $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \in \Omega$ entspricht dabei dem Ausgang "beim ersten Wurf wird die Augenzahl x_1 gewürfelt, beim zweiten Wurf wird die Augenzahl x_2 gewürfelt, …, beim n-ten Wurf wird die Augenzahl x_n gewürfelt". Die Teilmenge

$$S = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \in \Omega \mid x_1 + x_2 + \ldots + x_n = s\}$$

von Ω entspricht dann dem Ereignis "es wird die Augensumme s gewürfelt".

2.1.4 Beispiel: Das Zufallsexperiment besteht im n-maligen Werfen einer Münze.
- Man gebe einen passenden Ereignisraum Ω für dieses Zufallsexperiment an.
- Man beschreibe das Ereignis "es werden maximal m Adler geworfen" als Teilmenge von Ω.

▼

Lösung: Als Ereignisraum bietet sich die Menge

$$\Omega = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in \{0, 1\}\}$$

an. Die Liste $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \in \Omega$ entspricht dabei dem Ausgang "beim i-ten Wurf wird genau dann ein Adler geworfen, wenn $x_i = 1$ ist". Die Teilmenge

$$A = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \in \Omega \mid x_1 + x_2 + \ldots + x_n \leq m\}$$

von Ω entspricht dann dem Ereignis "es werden maximal m Adler geworfen".

2.1.5 Beispiel: Das Zufallsexperiment besteht im Ziehen mit Zurücklegen von k Kugeln aus einer Urne mit n Kugeln, von denen r rot und $s = n - r$ schwarz sind.
- Man gebe einen passenden Ereignisraum Ω für dieses Zufallsexperiment an.
- Man beschreibe das Ereignis "es werden nur rote Kugeln gezogen" als Teilmenge von Ω.

▼

Lösung: Wir nummerieren die roten Kugeln mit den Nummern $1, 2, \ldots, r$ und die schwarzen Kugeln mit den Nummern $r + 1, r + 2, \ldots, n$. Als Ereignisraum bietet sich die Menge

$$\Omega = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \mid x_1, x_2, \ldots, x_k \in \{1, 2, \ldots, n\}\}$$

an. Die Liste $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \in \Omega$ entspricht dabei dem Ausgang "beim ersten Zug wird die Kugel mit der Nummer x_1 gezogen, beim zweiten Zug wird die Kugel mit der Nummer x_2 gezogen, …, beim k-ten Zug wird die Kugel mit der Nummer x_k gezogen". Die Teilmenge

$$R = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \in \Omega \mid x_1, x_2, \ldots, x_k \in \{1, 2, \ldots, r\}\}$$

von Ω entspricht dann dem Ereignis "es werden nur rote Kugeln gezogen".

2.1.6 Beispiel: Das Zufallsexperiment besteht im Ziehen ohne Zurücklegen von k Kugeln aus einer Urne mit $n \geq k$ Kugeln, von denen r rot und $s = n - r$ schwarz sind.

- Man gebe einen passenden Ereignisraum Ω für dieses Zufallsexperiment an.
- Man beschreibe das Ereignis "es werden höchstens m rote Kugeln gezogen" als Teilmenge von Ω.

▼

Lösung: Wir nummerieren wieder die roten Kugeln mit den Nummern $1, 2, \ldots, r$ und die schwarzen Kugeln mit den Nummern $r+1, r+2, \ldots, n$. Als Ereignisraum bietet sich die Menge

$$\Omega = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \mid x_1, x_2, \ldots, x_k \in \{1, 2, \ldots, n\} \text{ paarweise verschieden}\}$$

an. Die Liste $\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \in \Omega$ entspricht dabei dem Ausgang "beim ersten Zug wird die Kugel mit der Nummer x_1 gezogen, beim zweiten Zug wird die Kugel mit der Nummer x_2 gezogen, …, beim k-ten Zug wird die Kugel mit der Nummer x_k gezogen". Die Teilmenge

$$H = \{\{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \in \Omega \mid \text{für höchstens } m \text{ Indizes } i \in \{1, 2, \ldots, k\} \text{ ist } x_i \leq r\}$$

von Ω entspricht dann dem Ereignis "es werden höchstens m rote Kugeln gezogen".

2.2 Der Begriff Wahrscheinlichkeit

Nachdem geklärt ist, mit welchem Ereignisraum Ω das gegebene Zufallsexperiment beschrieben wird, wollen wir nun den Ereignissen $A \subseteq \Omega$ in geeigneter Weise eine Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[A]$ zuordnen. Die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[A]$ eines Ereignisses A ist dabei ein Maß für die Tendenz, mit der dieses Ereignis A eintritt.

Angefangen von J. BERNOULLI bis hin zu R. von MISES versuchten zahlreiche Mathematiker, die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[A]$ eines Ereignisses A inhaltlich zu definieren. Alle diese Versuche waren mehr oder weniger zum Scheitern verurteilt, brachten aber insgesamt die von N. KOLMOGOROV zusammengefasste Erkenntnis, dass der das Zufallsexperiment steuernde Zufall durch ein geeignetes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ beschrieben werden kann.

2.2.1 Definition: Eine Abbildung $\mathbb{P}$, welche jedem Ereignis $A \subseteq \Omega$ eine Zahl $\mathbb{P}[A] \in \mathbb{R}$ zuordnet und dabei die drei Eigenschaften

a) $\mathbb{P}[\Omega] = 1$

b) für alle Ereignisse $A \subseteq \Omega$ ist $\mathbb{P}[A] \geq 0$

c) für endlich oder abzählbar unendlich viele paarweise disjunkte Ereignisse $A_1, A_2, \ldots \subseteq \Omega$ gilt

$$\mathbb{P}[A_1 \cup A_2 \cup \ldots] = \mathbb{P}[A_1] + \mathbb{P}[A_2] + \ldots$$

besitzt, nennt man ein Wahrscheinlichkeitsmaß (kurz W-Maß) auf dem Ereignisraum Ω.

Zu dieser Begriffsbildung sind einige Bemerkungen angebracht:

■ Falls es sich bei der Menge Ω um eine endliche oder abzählbar unendliche Menge handelt, bereitet diese Definition eines W-Maßes als Abbildung $\mathbb{P} : \mathcal{P}[\Omega] \to \mathbb{R}$ von der Potenzmenge $\mathcal{P}[\Omega]$ von Ω in $\mathbb{R}$ keine Probleme.

■ Ist jedoch Ω eine überabzählbare Menge (etwa $\Omega = [0, 1]$, $\Omega = \mathbb{R}$ oder $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$), so existieren nur triviale Abbildungen $\mathbb{P} : \mathfrak{P}[\Omega] \to \mathbb{R}$ von der Potenzmenge $\mathfrak{P}[\Omega]$ von Ω in $\mathbb{R}$ mit diesen drei Eigenschaften.

■ Diese Problematik lässt sich dadurch beheben, indem man nicht versucht, allen Teilmengen $A \subseteq \Omega$ in sinnvoller Weise eine Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[A]$ zuzuordnen, sondern nur jenen Ereignissen $A \subseteq \Omega$, für die man sich tatsächlich interessiert. Dabei ist zu beachten, dass es sich bei diesem System der interessierenden Ereignisse $\mathfrak{A}$ stets um eine Sigma-Algebra handelt, also um eine Teilmenge $\mathfrak{A}$ der Potenzmenge $\mathfrak{P}[\Omega]$ von Ω mit den drei Eigenschaften

- $\Omega \in \mathfrak{A}$
- mit $A, B \in \mathfrak{A}$ ist auch $A - B \in \mathfrak{A}$
- mit $A_1, A_2, \ldots \in \mathfrak{A}$ ist auch $A_1 \bigcup A_2 \bigcup \ldots \in \mathfrak{A}$.

■ Ist $\Omega = \mathbb{R}$, so verwendet man als System der interessierenden Ereignisse das System der BOREL'schen Mengen $\mathfrak{B}$. Es handelt sich dabei um die kleinste Sigma-Algebra, welche alle Intervalle enthält. Das System der Borel'schen Mengen enthält damit alle in der Praxis auftretenden Teilmengen von $\mathbb{R}$. Zur Konstruktion einer Teilmenge von $\mathbb{R}$, welche keine Borel'sche Menge ist, benötigt man das sogenannte Auswahlaxiom. Ist $\Omega \subset \mathbb{R}$, so verwendet man als System der interessierenden Ereignisse das System $\mathfrak{B}_\Omega = \{B \bigcap \Omega \mid B \in \mathfrak{B}\}$.

■ Um den Anfänger nicht zu überfordern, werden wir in Zukunft stets $A \subseteq \Omega$ schreiben, meinen dabei aber $A \in \mathfrak{A}$, wobei $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}[\Omega]$ eine geeignete Sigma-Algebra bezeichnet. Insbesondere verstehen wir in Zukunft unter einer Menge $B \subseteq \mathbb{R}$ stets eine Borel'sche Menge.

Es lässt sich leicht zeigen, dass W-Maße die folgenden elementaren Eigenschaften besitzen:

2.2.2 Satz: Ist $\mathbb{P}$ ein W-Maß auf dem Ereignisraum Ω, so gilt
a) $\mathbb{P}[\{\ \}] = 0$
b) für beliebige Ereignisse $A, B \subseteq \Omega$ gilt $\mathbb{P}[A \bigcup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \bigcap B]$
c) für beliebige Ereignisse $A, B \subseteq \Omega$ mit $A \subseteq B$ gilt $\mathbb{P}[B - A] = \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A]$ und damit $\mathbb{P}[A] \leq \mathbb{P}[B]$
d) für beliebige Ereignisse $A \subseteq \Omega$ gilt $\mathbb{P}[A^c] = 1 - \mathbb{P}[A]$

▼

Beweis: a) Wegen Definition 2.2.1 a) gilt offenbar

$$1 + \mathbb{P}[\{\ \}] = \mathbb{P}[\Omega] + \mathbb{P}[\{\ \}] = \mathbb{P}[\Omega \bigcup \{\ \}] = \mathbb{P}[\Omega] = 1$$

woraus unmittelbar $\mathbb{P}[\{\ \}] = 0$ folgt.

b) Für beliebige Ereignisse $A, B \subseteq \Omega$ sind die Ereignisse $A \bigcap B$, $A - B$ und $B - A$ paarweise disjunkt. Damit gilt wegen Definition 2.2.1 c) und den Beziehungen $A \bigcup B = A \bigcup (B - A)$ sowie $B = (A \bigcap B) \bigcup (B - A)$

$$\mathbb{P}[A \bigcup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B - A] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \bigcap B]$$

c) Für beliebige Ereignisse $A, B \subseteq \Omega$ mit $A \subseteq B$ gilt $B = A \bigcup (B - A)$, wobei die Ereignisse A und $B - A$ disjunkt sind. Aus Definition 2.2.1 c) folgt damit

$$\mathbb{P}[B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B - A]$$

d) Wegen c) und Definition 2.2.1 a) gilt

$$\mathbb{P}[A^c] = \mathbb{P}[\Omega - A] = \mathbb{P}[\Omega] - \mathbb{P}[A] = 1 - \mathbb{P}[A]$$

Die im folgenden angeführte Ein-Ausschaltregel erweist sich bei der tatsächlichen Berechnung der Wahrscheinlichkeit komplizierter Ereignisse oft als nützlich:

2.2.3 Satz: Ist $\mathbb{P}$ ein W-Maß auf dem Ereignisraum Ω, so gilt für beliebige Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq \Omega$

$$\mathbb{P}[A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[A_i] - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \mathbb{P}[A_i \cap A_j] + - \ldots + (-1)^{n-1}\,\mathbb{P}[A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n]$$

▼

Beweis: Wir beweisen diesen Satz durch vollständige Induktion nach n:

a) Aus Satz 2.2.2 b) folgt für beliebige Ereignisse $A_1,\ A_2 \subseteq \Omega$

$$\mathbb{P}[A_1 \cup A_2] = \mathbb{P}[A_1] + \mathbb{P}[A_2] - \mathbb{P}[A_1 \cap A_2]$$

b) Ist die Aussage dieses Satzes für n richtig ist, so gilt für beliebige Ereignisse $A_1,\ \ldots,\ A_n,\ A_{n+1} \subseteq \Omega$

$$\mathbb{P}[A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup A_{n+1}] = \mathbb{P}[A_1 \cup \ldots \cup A_n] + \mathbb{P}[A_{n+1}] - \mathbb{P}[(A_1 \cup \ldots \cup A_n) \cap A_{n+1}] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[A_i] - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \mathbb{P}[A_i \cap A_j] + - \ldots + (-1)^{n-1}\,\mathbb{P}[A_1 \cap \ldots \cap A_n] + \mathbb{P}[A_{n+1}]\ + \mathbb{P}[A_{n+1}] -$$

$$-\Big(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}[A_i \cap A_{n+1}] - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n} \mathbb{P}[A_i \cap A_j \cap A_{n+1}] + - \ldots + (-1)^{n-1}\,\mathbb{P}[A_1 \cap \ldots \cap A_n \cap A_{n+1}]\Big) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} \mathbb{P}[A_i] - \sum_{\substack{i,j=1 \\ i<j}}^{n+1} \mathbb{P}[A_i \cap A_j] + - \ldots + (-1)^{n}\,\mathbb{P}[A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n \cap A_{n+1}]$$

Schließlich erwähnen wir noch den Satz über die Stetigkeit von Wahrscheinlichkeitsmaßen:

2.2.4 Satz: Sei $\mathbb{P}$ ein W-Maß auf dem Ereignisraum Ω.
a) Für beliebige Ereignisse $A_1,\ A_2,\ \ldots \subseteq \Omega$ mit $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ gilt $\mathbb{P}[A_1 \cup A_2 \cup \ldots] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[A_n]$
b) Für beliebige Ereignisse $A_1,\ A_2,\ \ldots \subseteq \Omega$ mit $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ gilt $\mathbb{P}[A_1 \cap A_2 \cap \ldots] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[A_n]$

▼

Beweis: a) Die Ereignisse $A_1,\ A_2 - A_1,\ A_3 - A_2,\ \ldots$ sind paarweise disjunkt. Damit gilt wegen Definition 2.2.1

$$\mathbb{P}[A_1] + \mathbb{P}[A_2 - A_1] + \mathbb{P}[A_3 - A_2] + \ldots + \mathbb{P}[A_{n+1} - A_n] + \ldots = \mathbb{P}[A_1 \cup A_2 \cup \ldots] \le \mathbb{P}[\Omega] = 1$$

also konvergent der Reihenrest $\mathbb{P}[A_{n+1} - A_n] + \mathbb{P}[A_{n+2} - A_{n-1}] + \ldots$ gegen 0. Nun gilt aber für alle $n \in \mathbb{N}$

$$A_1 \cup A_2 \cup \ldots = A_n \cup (A_{n+1} - A_n) \cup (A_{n+2} - A_{n+1}) \cup \ldots$$

und damit

$$\mathbb{P}[A_1 \cup A_2 \cup \ldots] = \lim_{n\to\infty} (\mathbb{P}[A_n] + \mathbb{P}[A_{n+1} - A_n] + \mathbb{P}[A_{n+2} - A_{n+1}] + \ldots) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[A_n]$$

b) Die Ereignisse ${A_1}^c,\ {A_2}^c,\ \ldots$ erfüllen die Voraussetzungen von a). Aus Satz 2.2.2 d) folgt damit

$$\mathbb{P}[A_1 \cap A_2 \cap \ldots] = 1 - \mathbb{P}[{A_1}^c \cup {A_2}^c \cup \ldots] = 1 - \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[{A_n}^c] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[A_n]$$

Wichtig für viele Beispiele ist außerdem die folgende, auf der Definition 2.2.1 c) beruhende Bemerkung:

2.2.5 Bemerkung: Jedes W-Maß $\mathbb{P}$ auf einem endlichen oder abzählbar unendlichen Ereignisraum Ω ist durch Angabe der Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse $\mathbb{P}[\{\omega\}]$ bereits vollständig bestimmt. Speziell gilt dabei für alle $A \subseteq \Omega$

$$\mathbb{P}[A] = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}[\{\omega\}]$$

Vom Gesichtspunkt der Mathematik aus lässt sich ein Zufallsexperiment vollständig durch
- einen die möglichen Realisierungen charakterisierenden Ereignisraum Ω und
- ein W-Maß $\mathbb{P}$ auf Ω, mit dem der dieses Zufallsexperiment steuernde Zufall modelliert wird

beschreiben. Man nennt das Paar $(\Omega, \mathbb{P})$ ein mathematisches Modell dieses Zufallsexperiments. Im Rahmen der Mathematik spricht man in diesem Zusammenhang von einem Wahrscheinlichkeitsraum (kurz W-Raum).

Wir demonstrieren diesen Sachverhalt an einigen einfachen Beispielen:

2.2.6 Beispiel: Unser Zufallsexperiment besteht im Werfen eines homogenen Würfels.
- Gesucht ist ein passendes mathematisches Modell $(\Omega, \mathbb{P})$ für dieses Zufallsexperiment.
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird dabei eine ungerade Zahl gewürfelt?

▼

Lösung: Als Ereignisraum bietet sich die Menge

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

an. Da alle sechs Realisierungen offenbar gleich wahrscheinlich sind, ist jenes W-Maß $\mathbb{P}$ auf der Menge Ω, das wegen Bemerkung 2.2.5 durch

$$\mathbb{P}[\{1\}] = \mathbb{P}[\{2\}] = \ldots = \mathbb{P}[\{6\}] = 1/6$$

bereits vollständig bestimmt ist, ein geeignetes Modell für den dieses Zufallsexperiment steuernden Zufall. Für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $U = \{1, 3, 5\}$ (diese Menge beschreibt das Ereignis "es wird eine ungerade Zahl gewürfelt") gilt damit

$$\mathbb{P}[U] = \mathbb{P}[\{1\}] + \mathbb{P}[\{3\}] + \mathbb{P}[\{5\}] = 1/6 + 1/6 + 1/6 = 1/2$$

2.2.7 Beispiel: Unser Zufallsexperiment besteht im Werfen von zwei homogenen Würfeln.
- Gesucht ist ein passendes mathematisches Modell $(\Omega, \mathbb{P})$ für dieses Zufallsexperiment.
- Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird dabei die Augensumme 8 gewürfelt?

▼

Lösung: Als Ereignisraum bietet sich die Menge

$$\Omega = \{\{i, k\} \mid i, k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}\}$$

an. Da alle 36 Realisierungen offenbar gleich wahrscheinlich sind, ist jenes W-Maß $\mathbb{P}$ auf der Menge Ω, das wegen Bemerkung 2.2.5 durch $\mathbb{P}[\{\{i, k\}\}] = 1/36$ bereits vollständig bestimmt ist, ein geeignetes Modell für den dieses Zufallsexperiment steuernden Zufall. Für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses

$$S = \{\{2, 6\}, \{3, 5\}, \{4, 4\}, \{5, 3\}, \{6, 2\}\}$$

(diese Menge beschreibt das Ereignis "es wird die Augensumme 8 gewürfelt") gilt damit

$$\mathbb{P}[S] = \mathbb{P}[\{\{2, 6\}\}] + \mathbb{P}[\{\{3, 5\}\}] + \mathbb{P}[\{\{4, 4\}\}] + \mathbb{P}[\{\{5, 3\}\}] + \mathbb{P}[\{\{6, 2\}\}] = 1/36 + 1/36 + \ldots = 5/36$$

2.2.8 Beispiel: Unser Zufallsexperiment besteht im viermaligen Werfen einer homogenen Münze.
- Gesucht ist ein passendes mathematisches Modell $(\Omega, \mathbb{P})$ für dieses Zufallsexperiment.

▪ Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden dabei zwei "Adler" und zwei "Zahlen" geworfen?

▼

Lösung: Als Ereignisraum bietet sich die Menge

$$\Omega = \{\{x_1, x_2, x_3, x_4\} \mid x_i \in \{0, 1\}\}$$

an. Da alle 16 Realisierungen offenbar gleich wahrscheinlich sind, ist jenes W-Maß $\mathbb{P}$ auf der Menge Ω, das wegen Bemerkung 2.2.5 durch $\mathbb{P}[\{\{x_1, x_2, x_3, x_4\}\}] = 1/16$ bereits vollständig bestimmt ist, ein geeignetes Modell für den dieses Zufallsexperiment steuernden Zufall. Für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses

$$Z = \{\{0, 0, 1, 1\}, \{0, 1, 0, 1\}, \{1, 0, 0, 1\}, \{0, 1, 1, 0\}, \{1, 0, 1, 0\}, \{1, 1, 0, 0\}\}$$

(diese Menge beschreibt das Ereignis "es werden zwei Adler und zwei Zahlen geworfen") gilt damit

$$\mathbb{P}[Z] = \mathbb{P}[\{\{0, 0, 1, 1\}\}] + \mathbb{P}[\{\{0, 1, 0, 1\}\}] + \ldots = 1/16 + 1/16 + \ldots = 6/16$$

Während es relativ einfach ist, für ein gegebenes Zufallsexperiment einen geeigneten Ereignisraum Ω zu finden, bereitet die Auswahl eines geeigneten W-Maßes $\mathbb{P}$ auf Ω, mit dem der dieses Zufallsexperiment steuernde Zufall modelliert wird, üblicherweise beträchtliche Schwierigkeiten. Diese Frage der Modellbildung wird sich wie ein roter Faden durch den ganzen Lehrgang ziehen.